Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 148.

In vier Heften.

Berlin,
W. 10, Genthinerstraße 38.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1918.

GENERAL LIBRARY
SEP 29 1919
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 148.

Heft 1/2.

Ausgegeben den 15. Dezember.

Berlin W. 10

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1917.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 16 Mark.

Mit einer Beilage: Aufruf des Gesamtausschusses zur Verteilung von Lesestoff im Feld und in den Lazaretten.

Band 148. Heft 1/2.

Inhaltsverzeichnis.

Fischer, E., Über die Differentiationsprozesse der Algebra . . . . . Seite 1

Laudien, Herbert, Entwicklung willkürlicher Funktionen bei einem thermoelastischen Problem . . . . . — 79

Kostka, C., Schlußformel zur Hauptaufgabe der symmetrischen Funktionen — 88

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

An die Herren Mitarbeiter!

Die Inanspruchnahme des größten Teils der Rohstoffe für die Papierfabrikation seitens der Heeresverwaltung hat die Kriegswirtschaftsstelle für die Papier verarbeitenden Gewerbe gezwungen, die Zuteilung von Papier für Druckwerke ganz erheblich einzuschränken und die Lieferung von Frei- und Werbeexemplaren von Zeitschriften und Zeitungen zu verbieten. So sieht sich der Verlag nicht mehr imstande, den Herren Mitarbeitern Sonderdrucke ihrer Beiträge in unbeschränkter Zahl zur Verfügung stellen zu können, er kann fortab jedem der Herren Verfasser bis auf weiteres nur noch die seither unberechnet zugestandenen 25 Separate liefern und bittet freundlichst, davon Kenntnis nehmen zu wollen.

In Hochachtung und Ergebenheit

Georg Reimer.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 148.

Seite

Fischer, E., Über die Differentiationsprozesse der Algebra . . . . . 1— 78

Kostka, C., Schlußformel zur Hauptaufgabe der symmetrischen Funktionen 88— 99

König, Robert, *Riemann*sche Funktionen- und Differential-Systeme in der Ebene. Arithmetischer Teil . . . . . 146—182

Kürschák, Josef, Über spezielle Funktionenreihen . . . . . 113—115

Laudien, Herbert, Entwicklung willkürlicher Funktionen bei einem thermoelastischen Problem . . . . . 79— 87

Pasch, M., Über quaternäre Linienkoordinaten . . . . . 116—121

Szász, Otto, Über die Approximation stetiger Funktionen durch *Bernoulli*sche Polynome . . . . . 183—188

Schur, J., Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (Fortsetzung) . . . . . 122—145

Stäckel, P., Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen . . . . 101—112

382363

Ausgabedaten der Hefte von Band 148.

Heft 1/2 ausgegeben am 15. Dezember 1917.
Heft 3/4 ausgegeben am 13. Mai 1918.

38239

Georg Frobenius †.

Unsere Wissenschaft hat einen schweren Verlust erlitten. Am 3. August dieses Jahres starb Georg Frobenius, einer der hervorragendsten Mathematiker unserer Zeit, ein Gelehrter von seltener Vielseitigkeit und schöpferischer Kraft.

Ich darf hier nicht auf eine Darlegung seines wissenschaftlichen Entwicklungsganges eingehen, so wertvoll die Behandlung dieser Frage auch wäre, sondern ich will nur in dankbarer Erinnerung an den Dahingegangenen hervorheben, wie viel er dem Crelleschen Journal in den 47 Jahren seiner wissenschaftlichen Arbeit gegeben hat. Neununddreißig große Abhandlungen, den größten Teil seiner Arbeiten, hat er hier veröffentlicht; sie würden allein etwa vier Bände unserer Zeitschrift füllen.

Aus der reichen Fülle dieser Arbeiten, durch die Frobenius der Arithmetik und Algebra, der Gruppen- und Determinantentheorie, der Geometrie, der Funktionentheorie und der Lehre von den elliptischen und *Abel*schen Funktionen vielfach neue Methoden gegeben und neue Ziele gesetzt hat, einzelnes hervorzuheben, ist hier fast unmöglich. Immer wird z. B. seine Abhandlung »Über lineare Substitutionen und bilineare Formen«, seine »Theorie der linearen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten«, durch seine wundervolle Lösung des *Weierstraß*schen Formenproblemes und die Einführung des Ranges der Systeme oder seine eleganten Untersuchungen über das *Pfaff*sche Problem sowie diejenigen über die Transformation der Thetafunktionen zu den Zierden unserer Zeitschrift gehören.

Auch in seiner Berliner Zeit, in der er seine Hauptarbeiten in den Sitzungsberichten der Akademie veröffentlichte, stand er der Leitung des Journals als Mitwirkender nahe, und mit dem ihm eigenen Pflichtgefühl und seiner hervorragenden Begabung zur kritischen Beurteilung und Würdigung fremden Schaffens hat er sich die wesentlichsten Verdienste um unsere Zeitschrift erworben.

Wir werden dem Dahingegangenen immer ein dankbares Andenken bewahren.

Marburg, den 12. Dezember 1917.

Kurt Hensel.

Über die Differentiationsprozesse der Algebra.

Von Herrn *E. Fischer* in Erlangen, dzt. im Felde.

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
Einleitung		1
Kapitel I.	Abbildung von Funktionenscharen durch reziproke Paare endlicher linearer Operationen	5
	§ 1. Terminologie	5
	§ 2. Ausgezeichnete Paare von linearen Operationen	13
	§ 3. Reziproke Paare linearer Operationen	18
Kapitel II.	Abbildung isobarer Scharen durch reziproke Paare isobarer Polarenprozesse	27
	§ 4. Spezielle Polarenprozesse. Hauptfaltung	27
	§ 5. Isobare Funktionen	33
	§ 6. Modulsysteme, die aus isobaren Funktionen bestehen	36
	§ 7. Polarenprozesse	43
	§ 8. Isobare Polarenprozesse	49
Kapitel III.	Kern, Eigenfunktionen und Eigenwerte	52
	§ 9. Funktionen von zwei Variablenreihen	52
	§ 10. Kerne linearer Operationen	54
	§ 11. Die algebraischen Relationen zwischen gegebenen Funktionen	61
	§ 12. Eigenwerte und Eigenfunktionen	66

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit enthält eine Fortbildung derjenigen Entwicklungen, die ich in meiner Abhandlung*) „über algebraische Modulsysteme

*) Bd. 140 dieses Journals. — Vgl. auch *E. Noether*, über ganze rationale

und lineare homogene partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten" gegeben habe.

Ich will den Gegenstand von Grund auf neu darstellen, also bei der Beweisführung nirgends von der früheren Abhandlung Gebrauch machen. In der Einleitung aber möchte ich an die frühere Abhandlung anknüpfen*).

I. Ein Integritätsbereich von Formen $f(x)$ der Variablen $x_1, \dots x_n$ wurde dort als **Formenstaat** bezeichnet, wenn neben $f_1(x)$ und $f_2(x)$ stets auch

$$\bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_2(x)$$

dem Bereiche angehört; dabei bedeutet der Querstrich den Übergang zu den konjugiertkomplexen Koeffizienten. Der Begriff des Formenstaates spielt nun folgende Rolle in der Theorie der Modulsysteme**).

Betrachten wir zuerst zwei nicht identisch verschwindende Formen $M(x)$ und $f(x)$ der Variablen $x_1, \dots x_n$, von welchen die erste $M(x)$ durch die zweite $f(x)$ teilbar ist, also

$$M(x) = f(x)\, G(x),$$

worin $G(x)$ wieder eine Form bedeutet. *Dann liegt $G(x)$ in dem kleinsten die Formen $M(x)$ und $f(x)$ umfassenden Formenstaate.*

Betrachten wir jetzt allgemeiner Formen $M(x), f_1(x), \dots f_k(x)$, zwischen denen die Kongruenz

$$M(x) \equiv 0 \text{ modd. } f_1(x), \dots f_k(x)$$

besteht, so sind in der durch diese Kongruenz angedeuteten Gleichung

$$M(x) = f_1(x)\, G_1(x) + \cdots + f_k(x)\, G_k(x)$$

die Formen $G_1(x), \dots G_k(x)$ noch mit einer gewissen Willkür behaftet. *Man kann sie nun so wählen, daß sie dem kleinsten die Formen $M(x), f_1(x), \dots f_k(x)$ umfassenden Formenstaate angehören.*

Diese Fassung des Satzes genügt für eine gewisse Anwendung; man kann nämlich aus ihr nach *Hilbert*schen Prinzipien den Schluß ziehen, daß jeder Formenstaat ein *endlicher* Integritätsbereich ist.

Darstellung der Invarianten eines Systems von beliebig vielen Grundformen, Mathem. Annalen Bd. 77.

*) Für die Erklärung der Bezeichnungen sei auf die frühere Abhandlung oder auf die §§ 1 und 4 der gegenwärtigen verwiesen.

**) a. a. O. § 6 Satz 1. (und § 8).

An sich betrachtet ist aber die angegebene Fassung des Satzes unbefriedigend. Man wird eine *eindeutige Normierung* der $G_1(x), \dots G_k(x)$ wünschen, bei welcher sie Glieder jenes Formenstaates werden. Diesem Wunsche entspreche ich nun in der gegenwärtigen Arbeit durch den folgenden Satz:

Ist $M(x) \equiv 0$ *modd.* $f_1(x), \dots f_k(x)$, *so kann man*

$$M(x) = f_1(x)\, N_1(x) + \cdots + f_k(x)\, N_k(x)$$

setzen, worin die Formen $N_1(x), \dots N_k(x)$ *der Forderung genügen, daß sie sich aus einer und derselben Form* $F(x)$ *gemäß den Formeln*

$$N_1(x) = \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x), \dots\ N_k(x) = \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$$

ableiten lassen. Durch diese Forderung sind die Formen $N_1(x), \dots N_k(x)$ *völlig bestimmt. Sie gehören dem kleinsten die Formen* $M(x), f_1(x), \dots f_k(x)$ *umfassenden Formenstaate an.*

Die hierdurch hergestellte Beziehung zwischen den Formen $M(x)$ und $F(x)$ wollen wir durch

$$M(x) = \mathsf{R}\, F(x)$$

andeuten, *indem wir mit* R *den Operator*

$$\mathsf{R} = f_1(x)\, \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \cdots + f_k(x)\, \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

bezeichnen. Im Gegensatze zu $N_1(x), \dots N_k(x)$ ist die Form $F(x)$ nicht völlig bestimmt. Man kann aber $F(x)$ so wählen, daß sie ebenfalls der Kongruenz $F(x) \equiv 0$ modd. $f_1(x), \dots f_k(x)$ genügt; dann ist $F(x)$ völlig bestimmt und gehört ebenfalls jenem Formenstaate an.

Man kann nun noch einen Schritt weiter gehen und die bloße Behauptung von der Existenz einer solchen Darstellung ersetzen durch eine *explizite Formel.* Dazu dient der folgende Satz:

Für jede der Kongruenz $M(x) \equiv 0$ *modd.* $f_1(x), \dots f_k(x)$ *genügende Form* $M(x)$ *besteht eine Gleichung*

$$(1.) \qquad M(x) = (a_1 \mathsf{R} + \cdots + a_r \mathsf{R}^r)\, M(x),$$

worin $a_1, \dots a_r$ *Konstanten bedeuten.*

Setzt man hierin $(a_1 \mathsf{R}^0 + \cdots + a_r \mathsf{R}^{r-1})\, M(x) = F(x)$, so wird in der Tat $M(x) = \mathsf{R}\, F(x)$; dabei ist $F(x) \equiv 0$ modd. $f_1(x), \dots f_k(x)$, und $F(x)$

gehört jenem Formenstaate an, wie aus der Natur des Operators R unmittelbar erhellt.

Was die Zahl r und die Werte der r Konstanten $a_1, \ldots a_r$ in der Darstellung (1.) betrifft, so leuchtet ein*), daß man sie so wählen kann, *daß sie* außer von den gegebenen Formen $f_1(x), \ldots f_k(x)$ *nur noch von dem Grade der Form* $M(x)$ *abhängen*, dagegen von den Koeffizienten der Form $M(x)$ unabhängig sind.

II. Als gemeinsames Prinzip gewisser klassischer Entwicklungen, wie der Reihenentwicklung nach Kugelfunktionen, der *Clebsch-Gordan*schen Reihenentwicklung, der *Clebsch*schen Normalform der Gleichung eines Linienkomplexes, sowie gewisser Verallgemeinerungen der genannten, in welchen statt einfacher Moduln bereits Modulsysteme auftreten, hatte ich den folgenden Satz formuliert**):

Sind die Formen $f_1(x), \ldots f_k(x)$ *gegeben, so kann man jede Form* $F(x)$ *spalten in*

$$F(x) = M(x) + \Phi(x),$$

wobei $M(x)$ *und* $\Phi(x)$ *den Forderungen genügen*

$$M(x) \equiv 0 \text{ modd. } f_1(x), \ldots f_k(x),$$

$$0 = \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x), \ldots 0 = \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x).$$

$M(x)$ *und* $\Phi(x)$ *sind durch diese Forderungen völlig bestimmt. Sie gehören dem kleinsten die Formen* $F(x), f_1(x), \ldots f_k(x)$ *umfassenden Formenstaate an.*

Der Operator R gestattet nun auch diese Spaltung durch eine *explizite Formel* zu vollziehen. Aus der Gleichung $F(x) = M(x) + \Phi(x)$ folgt nämlich unter Berücksichtigung der Gleichung (1.) und der unmittelbar einleuchtenden Gleichung $\mathsf{R}\,\Phi(x) = 0$ sofort:

---

*) Die Anwendung des Operators $\mathsf{R}^0 - a_1\,\mathsf{R} - \cdots - a_r\,\mathsf{R}^r$ bringt die Form $M(x)$ zum Verschwinden. Hat man nun für mehrere Formen $M(x)$ je einen solchen Operator konstruiert, so bringt das Produkt dieser Operatoren jede dieser Formen zum Verschwinden. Da es nun von vorgeschriebenem Grade nur endlich viele linearunabhängige der Kongruenz genügende Formen $M(x)$ gibt, so besteht die Möglichkeit, für sie einen gemeinsamen Operator zu konstruieren. — Übrigens werden sich beim Beweise des obigen Satzes r; $a_1, \ldots a_r$ von vornherein als unabhängig von den Koeffizienten der Form $M(x)$ ergeben.

**) a. a. O. § 2 und § 6 Satz 2. (und § 8).

$$M(x) = (a_1 \mathsf{R} + \cdots + a_r \mathsf{R}^r) F(x).$$

Die Formel setzt in Evidenz, daß $M(x)$, und daher auch $\Phi(x)$, jenem Formenstaate angehören.

Auch diese explizite Formel kann als Verallgemeinerung klassischer Beispiele betrachtet werden.

III. Die *Clebsch-Gordan*sche Reihenentwicklung kann man in zweifacher Weise auffassen, je nachdem man die Rolle des Ω-Prozesses oder die Rolle der Polarenprozesse betont. Der ersteren Auffassung entspricht die Formulierung des obigen Spaltungssatzes. Dagegen ist der zweiten Auffassung in den Entwicklungen meiner früheren Arbeit keine Rechnung getragen. Ähnliches gilt für die übrigen angeführten Beispiele.

Die neue Auffassung der Theorie berücksichtigt nun auch *polarenartige Prozesse* und umspannt damit den gesamten in den klassischen Beispielen angeregten Stoff*).

Kapitel I. Abbildung von Funktionenscharen durch reziproke Paare endlicher linearer Operationen.

§ 1. Terminologie.

Die allgemeine Theorie der linearen Operationen in endlichen Scharen wird meist in der Weise dargestellt, daß ein bestimmtes Koordinatensystem zugrunde gelegt wird und die linearen Substitutionen dieser Koordinaten und die Matrices dieser Substitutionen betrachtet werden. Es ist nun zwar ohne weiteres klar, wie man die Darstellung einzurichten hat, wenn man diese die Übersicht störende Auszeichnung eines bestimmten Koordinatensystems vermeiden will. Da aber eine solche Darstellung nicht allgemein üblich ist, so müssen die nötigen Benennungen ausdrücklich verabredet werden. Zugleich kann der Fall nichtendlicher Scharen berücksichtigt werden.

I. Unter Konstanten verstehen wir komplexe Zahlen, unter Funktionen ganze rationale Funktionen der unabhängigen Variablen $x_1, \ldots x_n$ mit konstanten Koeffizienten. Bedeuten (F) und (G) zwei Funktionen-

*) Vgl. *Mertens*, über ganze Funktionen von m Systemen von je n Unbestimmten, Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. 4.

mengen, so soll die Beziehung $(F) \leqq (G)$ ausdrücken, daß jede zu (F) gehörige Funktion auch zu (G) gehört.

Eine Funktionenmenge heißt eine *Schar*, wenn die Summe zweier Funktionen der Menge und das Produkt einer Funktion der Menge mit einer beliebigen Konstanten stets wieder der Menge angehört.

Zwei Scharen (M) und (Φ) heißen *komplementär in* der Schar (F), wenn $(M) \leqq (F)$ und $(\Phi) \leqq (F)$ ist und wenn sich jede Funktion $F(x)$ aus (F) auf *eine und nur eine* Weise in die Summe

$$F(x) = M(x) + \Phi(x)$$

einer Funktion $M(x)$ aus (M) und einer Funktion $\Phi(x)$ aus (Φ) spalten läßt*).

Zerlegt man hierin die Bestimmung „eine und nur eine“ in „mindestens eine“ und „höchstens eine“, so besagt die letztere, daß die Scharen (M) und (Φ) nur die Funktion 0 gemein haben.

II. Es sei eine Schar (F) von Funktionen $F(x)$ gegeben. Unter einer *linearen Operation* für (F) versteht man eine Vorschrift A, vermöge welcher jeder Funktion $F(x)$ aus (F) eine bestimmte Funktion $\mathsf{A}F(x)$ zugeordnet wird, und zwar so, daß die Regeln

$$\mathsf{A}[F_1(x) + F_2(x)] = \mathsf{A}F_1(x) + \mathsf{A}F_2(x), \qquad \mathsf{A}[cF(x)] = c\,\mathsf{A}F(x)$$

gelten. Dabei bedeuten $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F(x)$ beliebige Funktionen aus (F) und c eine beliebige Konstante. Die Funktionen $\mathsf{A}F(x)$ brauchen durchaus nicht zu (F) zu gehören.

Wir bezeichnen nun mit $\mathsf{A}(F)$ *die Gesamtheit derjenigen Funktionen* $N(x)$, *für welche die Gleichung*

$$N(x) = \mathsf{A}F(x) \tag{2.}$$

mindestens eine Lösung $F(x)$ *aus* (F) *besitzt, und mit* $(F)_{\mathsf{A}}$ *die Gesamtheit derjenigen Funktionen* $\Phi(x)$ *aus* (F), *welche der Gleichung*

$$0 = \mathsf{A}\Phi(x) \tag{3.}$$

genügen. $\mathsf{A}(F)$ und $(F)_{\mathsf{A}}$ sind Scharen; $(F)_{\mathsf{A}} \leqq (F)$.

Ist A eine lineare Operation für die Schar (F), so sagen wir von

---

*) Sind zwei Scharen (F), (Φ) gegeben und ist $(\Phi) \leqq (F)$, so gibt es mindestens eine Schar (M), welche zu (Φ) in (F) komplementär ist. Dieser Satz ist jedoch für das Folgende nicht nötig.

einer Schar $(F^*) \leqq (F)$, daß sie einen *Grundbereich für* A bildet, wenn sie die folgende Eigenschaft hat:

Eigenschaft v. Für jede Funktion $N(x)$ aus $\mathsf{A}(F)$ hat die Gleichung

$$N(x) = \mathsf{A}F^*(x) \tag{4.}$$

eine und nur eine Lösung $F^*(x)$ aus (F^*).

Die Eigenschaft v kann auch dahin ausgesprochen werden, daß Gleichung (4.) eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen den Funktionen $F^*(x)$ von (F^*) und den Funktionen $N(x)$ von $\mathsf{A}(F)$ definiert; denn jede Funktion von (F^*) ist Lösung einer Gleichung (4.).

Indem man die Bestimmung „eine und nur eine" in „mindestens eine" und „höchstens eine" zerlegt, kann man die Eigenschaft v in zwei Eigenschaften spalten:

Eigenschaft v_1. Für jede Funktion $N(x)$ aus $\mathsf{A}(F)$ hat (4.) mindestens eine Lösung $F^*(x)$ aus (F^*).

Eigenschaft v_2. Die Gleichung $0 = \mathsf{A}F^*(x)$ hat keine von 0 verschiedene Lösung $F^*(x)$ aus (F^*). M. a. W.:

Eigenschaft v_2. (F^*) und $(F)_\mathsf{A}$ haben nur die Funktion 0 gemein.

Damit (F) selbst Grundbereich für A ist, ist, da hier v_1 trivial wird, notwendig und hinreichend, daß $(F)_\mathsf{A}$ nur aus der Funktion 0 besteht.

Satz 1. Damit die Schar $(F^*) \leqq (F)$ einen Grundbereich der für die Schar (F) definierten linearen Operation A bildet, ist notwendig und hinreichend, daß sie *zu der Schar* $(F)_\mathsf{A}$ *komplementär in* (F) ist*).

Um nämlich eine gegebene Funktion $F(x)$ aus (F) in die Summe

$$F(x) = F^*(x) + \Phi(x) \tag{5.}$$

einer Funktion $F^*(x)$ aus (F^*) und einer Funktion $\Phi(x)$ aus $(F)_\mathsf{A}$ zu spalten, hat man $F^*(x)$ aus (F^*) so zu suchen, daß die Differenz $F(x) - F^*(x)$ zu $(F)_\mathsf{A}$ gehört, also der Gleichung $0 = \mathsf{A}\,[F(x) - F^*(x)]$ oder $\mathsf{A}F(x) = \mathsf{A}F^*(x)$ genügt. Man hat daher aus $F(x)$ zunächst die zu $\mathsf{A}(F)$ gehörige Funktion

$$N(x) = \mathsf{A}F(x) \tag{6.}$$

---

*) Aus diesem Satze und der vorigen Fußnote erhellt, daß es zu jeder linearen Operation A mindestens eine Schar gibt, die einen Grundbereich für A bildet. Jedoch haben wir davon in dieser Allgemeinheit keinen Gebrauch zu machen.

zu bilden und hierauf für die mit dieser Funktion $N(x)$ gebildete Gleichung (4.) eine Lösung $F^*(x)$ aus (F^*) zu suchen. Damit also für jede Funktion $F(x)$ aus (F) die Spaltung (5.) auf eine und nur eine Weise möglich ist, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Funktion $N(x)$ aus $\mathsf{A}(F)$ die Gleichung (4.) eine und nur eine Lösung $F^*(x)$ aus (F^*) besitzt. Damit ist Satz 1. bewiesen und zugleich gezeigt, in welcher Weise die Herstellung der Spaltung (5.) auf die Lösung von (4.) zurückkommt.

Genauer sind die einzelnen Eigenschaften v_1, v_2 damit gleichbedeutend, daß jede Funktion $F(x)$ aus (F) mindestens bzw. höchstens eine Spaltung (5.) besitzt.

Ist A eine lineare Operation für die Schar (F) und ist (F^*) eine Schar $\leqq (F)$, so verstehen wir unter der *Wirkung* von A auf (F^*) diejenige lineare Operation A^* für (F^*), welche durch die für jede Funktion $F^*(x)$ aus (F^*) gültige Gleichung

$$\mathsf{A}^*\, F^*(x) = \mathsf{A}\, F^*(x)$$

definiert ist. Dabei ist $\mathsf{A}^*(F^*) \leqq \mathsf{A}(F)$ und $(F^*)_{\mathsf{A}^*} \leqq (F)_{\mathsf{A}}$, u. zw. ist $(F^*)_{\mathsf{A}^*}$ die Gesamtheit der zu (F^*) gehörigen Funktionen von $(F)_{\mathsf{A}}$.

Unter Einführung der Wirkung A^* von A auf (F^*) kann man die Eigenschaften v_1, v_2 so fassen:

Eigenschaft v_1. $\mathsf{A}(F) = \mathsf{A}^*(F^*)$.

Eigenschaft v_2. $(F^*)_{\mathsf{A}^*}$ besteht nur aus der Funktion 0. Und man kann v_2 auch dahin aussprechen, daß (F^*) einen Grundbereich für A^* bildet.

III. Die linearen Operationen $\{1\}$, $\{0\}$, $\mathsf{A}+\mathsf{B}$, $c\mathsf{A}$, worin A und B gegebene lineare Operationen für die Schar (F) und c eine Konstante bedeuten, werden durch die für jede Funktion $F(x)$ aus (F) gültigen Gleichungen

$$\{1\}\, F(x) = F(x), \qquad \{0\} F(x) = 0,$$
$$[\mathsf{A}+\mathsf{B}]F(x) = \mathsf{A}F(x) + \mathsf{B}F(x), \qquad [c\mathsf{A}]F(x) = c\,\mathsf{A}F(x)$$

definiert. Die linearen Operationen $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_\nu$ für (F) heißen linearabhängig, wenn eine Gleichung $c_1\mathsf{A}_1 + \cdots + c_\nu\mathsf{A}_\nu = \{0\}$ besteht, in welcher $c_1, \ldots c_\nu$ Konstanten bedeuten, die nicht sämtlich 0 sind.

Ist A eine lineare Operation für die Schar (F), B eine lineare Operation für die Schar (G), und ist $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$, so wird unter BA diejenige lineare Operation für (F) verstanden, welche durch die für jede Funktion $F(x)$ aus (F) gültige Gleichung

$$(7.) \qquad [\mathsf{BA}]\,F(x) = \mathsf{B}[\mathsf{A}F(x)]$$

definiert ist. Dabei ist, wie wir zeigen wollen,

$$(8.) \qquad [\mathsf{BA}](F) \leqq \mathsf{B}(G), \qquad (F)_{\mathsf{A}} \leqq (F)_{[\mathsf{BA}]}.$$

Die zweite dieser Beziehungen leuchtet unmittelbar ein. Die erste beruht darauf, daß $[\mathsf{BA}](F)$ offenbar die Gesamtheit derjenigen Funktionen $H(x)$ ist, für welche die Gleichung

$$H(x) = \mathsf{B}N(x)$$

mindestens eine Lösung $N(x)$ aus $\mathsf{A}(F)$ besitzt; bezeichnet man also die Wirkung von B auf $\mathsf{A}(F)$ mit B^*, so ist

$$(9.) \qquad [\mathsf{BA}](F) = \mathsf{B}^*(\mathsf{A}(F)),$$

und wegen $\mathsf{B}^*(\mathsf{A}(F)) \leqq \mathsf{B}(G)$ folgt $[\mathsf{BA}](F) \leqq \mathsf{B}(G)$.

Ist A eine lineare Operation für (F) und ist $\mathsf{A}(F) \leqq (F)$, so setzt man $\mathsf{A}^1 = \mathsf{A}$, $\mathsf{A}^2 = \mathsf{A}^1\mathsf{A}$, $\mathsf{A}^3 = \mathsf{A}^2\mathsf{A}$, ..., ferner $\mathsf{A}^0 = \{1\}$.

IV. Funktionen $F_1(x), \ldots F_\nu(x)$ heißen linearabhängig, wenn eine Gleichung $c_1 F_1(x) + \cdots + c_\nu F_\nu(x) = 0$ besteht, in welcher $c_1, \ldots c_\nu$ Konstanten bedeuten, die nicht sämtlich 0 sind.

Eine *Schar* (F) heißt *endlich*, wenn es eine ganze nichtnegative Zahl ϱ von der Beschaffenheit gibt, daß je $\varrho + 1$ Funktionen aus (F) linearabhängig sind. Die kleinste solche Zahl ϱ wird der *Rang der endlichen Schar* (F) genannt und mit Rg. (F) bezeichnet.

Stehen die *endlichen* Scharen (F), (G) in der Beziehung $(F) \leqq (G)$ und ist Rg. (F) = Rg. (G), so ist $(F) = (G)$.

Es seien die Scharen (M_0) und (Φ) komplementär in der (endlichen oder nichtendlichen) Schar (F) und es sei (M_0) *endlich* und vom Range ϱ. Damit dann eine vorgelegte Schar (M) die Eigenschaft hat, zu (Φ) in (F) komplementär zu sein, ist notwendig und hinreichend, daß $(M) \leqq (F)$ ist, (M) und (Φ) nur die Funktion 0 gemein haben und (M) endlich und vom Range ϱ ist. Ist ferner (M') eine Schar $\leqq (F)$, die mit (Φ) nur die Funktion 0 gemein hat, so ist (M') endlich und ihr Rang $\leqq \varrho$.

Ist (F) eine *endliche* Schar und (Φ) eine Schar $\leqq (F)$, so gibt es mindestens eine zu (Φ) in (F) komplementäre Schar, und damit die vorgelegte Schar (M) die Eigenschaft hat, zu (Φ) in (F) komplementär zu sein, ist notwendig und hinreichend, daß $(M) \leqq (F)$ ist, (M) und (Φ) nur die Funktion 0 gemein haben und

$$(10.) \qquad \text{Rg.}\,(M) + \text{Rg.}\,(\Phi) = \text{Rg.}\,(F)$$

ist.

In den folgenden Bemerkungen bedeutet (F) eine endliche oder nichtendliche Schar, A eine lineare Operation für (F) und, wo von einer Schar $(F^*) \leqq (F)$ die Rede ist, A^* die Wirkung von A auf (F^*).

Ist (F) *endlich*, so ist $\mathsf{A}(F)$ endlich und $\text{Rg.}\,\mathsf{A}(F) \leqq \text{Rg.}\,(F)$. Wenn es daher, mag (F) endlich sein oder nicht, eine *endliche* Schar $(F^*) \leqq (F)$ mit der Eigenschaft v_1 gibt, so ist $\mathsf{A}(F)$ endlich und $\text{Rg.}\,\mathsf{A}(F) \leqq \text{Rg.}\,(F^*)$.

Nehmen wir, ohne die Endlichkeit von (F) vorauszusetzen, an, daß $\mathsf{A}(F)$ *endlich* ist, so ist dafür, daß (F) selbst Grundbereich für A ist, notwendig und hinreichend, daß (F) endlich und $\text{Rg.}\,\mathsf{A}(F) = \text{Rg.}\,(F)$ ist.

Ist (F^*) eine Schar $\leqq (F)$ und nehmen wir an, daß $\mathsf{A}^*(F^*)$ *endlich* ist, während wir weder von (F) noch von (F^*) die Endlichkeit voraussetzen, so ist also dafür, daß (F^*) die Eigenschaft v_2 hat, notwendig und hinreichend, daß (F^*) endlich und

$$(v_2.) \qquad \text{Rg.}\,\mathsf{A}^*(F^*) = \text{Rg.}\,(F^*)$$

ist.

Ist (F^*) eine Schar $\leqq (F)$ und nehmen wir an, daß $\mathsf{A}(F)$ *endlich* ist, während wir weder von (F) noch von (F^*) die Endlichkeit voraussetzen, so ist dafür, daß (F^*) die Eigenschaft v_1 hat, notwendig und hinreichend, daß

$$(v_1.) \qquad \text{Rg.}\,\mathsf{A}(F) = \text{Rg.}\,\mathsf{A}^*(F^*)$$

ist. Unter denselben Annahmen ist dafür, daß (F^*) Grundbereich für A ist, notwendig und hinreichend, daß (F^*) endlich und

$$(v.) \qquad \text{Rg.}\,\mathsf{A}(F) = \text{Rg.}\,\mathsf{A}^*(F^*) = \text{Rg.}\,(F^*)$$

ist.

Ist (F) *endlich*, so gibt es mindestens eine Schar $\leqq (F)$, die einen Grundbereich für A bildet, und damit die vorgelegte Schar $(F^*) \leqq (F)$ Grundbereich für A ist, ist notwendig und hinreichend, daß sie mit $(F)_\mathsf{A}$ nur die Funktion 0 gemein hat und daß $\text{Rg.}\,(F^*) + \text{Rg.}\,(F)_\mathsf{A} = \text{Rg.}\,(F)$ ist; daraus folgt wegen $\text{Rg.}\,\mathsf{A}(F) = \text{Rg.}\,(F^*)$: ist (F) *endlich*, so ist

$$(11.) \qquad \text{Rg.}\,\mathsf{A}(F) + \text{Rg.}\,(F)_\mathsf{A} = \text{Rg.}\,(F).$$

Ist $\mathsf{A}(F)$ *endlich*, so gibt es, mag (F) endlich sein oder nicht, min-

destens eine Schar $\leqq (F)$, die einen Grundbereich für A bildet. Bestimmt man nämlich, Rg. $\mathsf{A}(F) = \varrho$ setzend und von dem trivialen Fall $\varrho = 0$ absehend, zu jeder von ϱ linearunabhängigen Funktionen $N(x)$ aus $\mathsf{A}(F)$ eine zu (F) gehörige Lösung $F(x)$ der Gleichung (4.), so bildet die kleinste diese ϱ Lösungen umfassende Schar einen Grundbereich für A. Da übrigens diese Schar endlich und vom Range ϱ ist, so erkennt man wegen Satz 1. aus den obigen Bemerkungen über komplementäre Scharen, daß dafür, daß eine vorgelegte Schar $(F^*) \leqq (F)$ einen Grundbereich für A bildet, notwendig und hinreichend ist, daß sie die Eigenschaft v_2 hat und endlich und vom Range Rg. $(F^*) =$ Rg. $\mathsf{A}(F)$ ist, in Übereinstimmung mit den schon oben unter $(v.)$ gemachten Angaben.

Ist A eine lineare Operation für die (endliche oder nichtendliche) Schar (F) und ist die Schar $\mathsf{A}(F)$ *endlich*, so heißt die *Operation* A *endlich*, und der Rang von $\mathsf{A}(F)$ wird auch der *Rang der endlichen Operation* A genannt und mit Rg. A bezeichnet.

V. Es seien (F), (G) gegebene (endliche oder nichtendliche) Scharen, A, B lineare Operationen für (F), (G) und $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$, sodaß BA für (F) gebildet werden kann. Ist nun $\mathsf{B}(G)$ *endlich*, so ist wegen (8.) auch $[\mathsf{BA}](F)$ endlich und Rg. $[\mathsf{BA}](F) \leqq$ Rg. $\mathsf{B}(G)$; m. a. W. wenn B *endlich* ist, so ist auch BA endlich und Rg. BA $\leqq$ Rg. B. Ist dagegen $\mathsf{A}(F)$ *endlich*, so ist, wenn B^* die Wirkung von B auf $\mathsf{A}(F)$ bezeichnet, auch $\mathsf{B}^*(\mathsf{A}(F))$ endlich und Rg. $\mathsf{B}^*(\mathsf{A}(F)) \leqq$ Rg. $\mathsf{A}(F)$; wegen (9.) ist also auch $[\mathsf{BA}](F)$ endlich und Rg. $[\mathsf{BA}](F) \leqq$ Rg. $\mathsf{A}(F)$; m. a. W. wenn A *endlich* ist, so ist auch BA endlich und Rg. BA $\leqq$ Rg. A. Ist also sowohl B als A endlich, so hat man

(12.) $$\text{Rg. BA} \leqq \text{Rg. B}, \quad \text{Rg. BA} \leqq \text{Rg. A}.$$

VI. Zur Vereinfachung der Schreibweise wollen wir, wenn A^* die Wirkung der für die Schar (F) definierten linearen Operation A auf die Schar $(F^*) \leqq (F)$ ist, die Scharen $\mathsf{A}^*(F^*)$ und $(F^*)_{\mathsf{A}^*}$ einfach mit $\mathsf{A}(F^*)$ und $(F^*)_{\mathsf{A}}$ bezeichnen.

Dann nimmt (9.) die Gestalt

$$[\mathsf{BA}](F) = \mathsf{B}(\mathsf{A}(F))$$

an, und man kann diese Schar einfach mit

$$\mathsf{BA}(F)$$

bezeichnen.

Statt (7.) schreiben wir einfach

$$\mathsf{BA}F(x).$$

An der begrifflichen Unterscheidung von A^* und A muß aber festgehalten werden; ist z. B. $\mathsf{A}(F^*)$ endlich, so ist ihr Rang mit Rg. A^* zu bezeichnen.

VII. Sind (F), (G) *endliche* Scharen von den Rängen ϱ, σ und betrachten wir lineare Operationen A für (F), welche die Eigenschaft $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$ haben, so sind je $\varrho\sigma + 1$ solche Operationen linearabhängig*).

Ist daher A eine solche lineare Operation für die *endliche* Schar (F), daß $\mathsf{A}(F) \leqq (F)$ ist, so besteht eine Gleichung

$$a_0\mathsf{A}^0 + a_1\mathsf{A} + \cdots + a_r\mathsf{A}^r = \{0\}$$

mit Konstanten $a_0, a_1, \ldots a_r$, die nicht sämtlich 0 sind. Fordern wir dabei, daß r möglichst klein sei, so sind die Verhältnisse $a_0 : a_1 : \cdots : a_r$ völlig bestimmt**).

Ist *speziell*

$$\text{Rg. } \mathsf{A} = \text{Rg. } (F),$$

d. h. bildet (F) selbst einen Grundbereich für A, so muß $a_0 \neq 0$ sein, weil sonst die Anwendung derjenigen linearen Operation A^{-1}, welche dadurch

---

*) Für den Fall *endlicher* Scharen (F), (G) hängen die Ausführungen dieses § folgendermaßen mit der Theorie der Matrices zusammen. Ist (F) eine endliche Schar vom Range ϱ, und sehen wir von dem trivialen Falle $\varrho = 0$ ab, so wird jedes System von ϱ linearunabhängigen Funktionen $F_1(x), \ldots F_\varrho(x)$ aus (F) eine Basis von (F) genannt. Jede Funktion $F(x)$ aus (F) besitzt dann eine eindeutige Darstellung $F(x) = \xi_1 F_1(x) + \cdots + \xi_\varrho F_\varrho(x)$ mit Konstanten $\xi_1, \ldots \xi_\varrho$, und wir nennen $\xi_1, \ldots \xi_\varrho$ die Koordinaten von $F(x)$ in dem durch die Basis $F_1(x), \ldots F_\varrho(x)$ bestimmten Koordinatensystem.

In einer zweiten endlichen Schar (G) vom Range σ sei ein Koordinatensystem mit den Koordinaten $\eta_1, \ldots \eta_\sigma$ festgelegt. Dann wird jede lineare Operation A für (F), welche die Eigenschaft $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$ hat, durch ein Gleichungssystem

$$\eta_1 = a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1\varrho}\xi_\varrho$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_\sigma = a_{\sigma 1}\xi_1 + \cdots + a_{\sigma\varrho}\xi_\varrho$$

mit Konstanten a_{ik} gegeben, und umgekehrt definiert jedes solche Gleichungssystem eine lineare Operation A für (F) mit der Eigenschaft $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$. Der Rang der Matrix (a_{ik}) ist gleich dem Range der Operation A. Dem Rechnen mit Operationen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots$ läuft das Rechnen mit Matrices $(a_{ik}), (b_{ik}), \ldots$ parallel.

**) Es ist offenbar $r \leqq \varrho^2$. Der bekannte Satz, daß sogar $r \leqq \varrho$ ist, kommt für das Folgende zunächst nicht in Betracht.

definiert wird, daß man die Auflösung der Gleichung (2.) mit $F(x) = \mathsf{A}^{-1}N(x)$ bezeichnet, eine Relation mit kleinerem r hervorbringen würde. Wir setzen $a_0 = -1$. Sehen wir von dem trivialen Falle Rg. $(F) = 0$ ab, so ist $r > 0$, und wir erhalten also für den Fall Rg. A = Rg. (F) eine für jede Funktion $F(x)$ aus (F) gültige Gleichung

$$F(x) = (a_1 \mathsf{A} + \cdots + a_r \mathsf{A}^r) F(x).$$

Umgekehrt folgt aus dem Bestehen einer solchen Gleichung, daß Rg. A = Rg. (F) sein muß. Zugleich ist $\mathsf{A}^{-1} = a_1 \mathsf{A}^0 + \cdots + a_r \mathsf{A}^{r-1}$.

§ 2. Ausgezeichnete Paare von linearen Operationen.

I. Es seien (F), (G) (endliche oder nichtendliche) Scharen, A eine lineare Operation für (F), B eine lineare Operation für (G), und es sei $\mathsf{B}(G) \leqq (F)$, sodaß man die lineare Operation

$$\mathsf{S} = \mathsf{AB}$$

für (G) bilden kann.

Wenn die Schar $\mathsf{B}(G)$ einen Grundbereich für A bildet, so sagen wir, daß A, B die *Eigenschaft s* haben. Diese Eigenschaft können wir in zwei Gestalten aussprechen, je nachdem wir, $\mathsf{B}(G) = (F^*)$ setzend, an Gleichung (4.) oder an Gleichung (5.) anknüpfen. Wir können sie ferner in zwei Eigenschaften spalten:

Eigenschaft s_1. $\mathsf{A}(F) = \mathsf{AB}(G)$.

Eigenschaft s_2. $(\mathsf{B}(G))_{\mathsf{A}}$ besteht nur aus der Funktion 0.

Die Eigenschaft s_2 kann man noch anders ausdrücken. Sie besagt, daß für Funktionen $M(x)$ aus $\mathsf{B}(G)$ aus der Annahme $\mathsf{A}M(x) = 0$ die Gleichung $M(x) = 0$ folgt. Setzt man $M(x) = \mathsf{B}G(x)$, so erhält man für s_2 die Fassung: für Funktionen $G(x)$ aus (G) folgt aus der Annahme $\mathsf{AB}G(x) = 0$ die Gleichung $\mathsf{B}G(x) = 0$. Daher kann man s_2 auch so aussprechen:

Eigenschaft s_2. $(G)_{[\mathsf{AB}]} = (G)_{\mathsf{B}}$.

Ist speziell die Operation AB *endlich*, so ist für das Bestehen der Eigenschaft s_2 notwendig und hinreichend, daß die Operation B endlich und

$(s_2.)$ $$\text{Rg. } \mathsf{AB} = \text{Rg. } \mathsf{B}$$

ist.

Ist speziell die Operation A *endlich*, also auch AB endlich, so ist für das Bestehen der Eigenschaft s_1 notwendig und hinreichend, daß

$$(s_1.) \qquad \text{Rg. A} = \text{Rg. AB}$$

ist. Unter derselben Annahme ist dafür, daß B(G) Grundbereich für A ist, notwendig und hinreichend, daß die Operation B endlich und

$$(s.) \qquad \text{Rg. A} = \text{Rg. AB} = \text{Rg. B}$$

ist.

II. Es seien (F), (G) (endliche oder nichtendliche) Scharen, A eine lineare Operation für (F), B eine lineare Operation für (G), und es sei

$$\text{A}(F) \leqq (G), \qquad \text{B}(G) \leqq (F),$$

sodaß man die Operationen

$$\text{R} = \text{BA} \text{ für } (F), \qquad \text{S} = \text{AB} \text{ für } (G)$$

bilden kann.

Definition. A, B heißen ein *ausgezeichnetes Paar*, wenn A(F) Grundbereich für B und B(G) Grundbereich für A ist. Diese Definition können wir nun in folgenden Gestalten aussprechen.

Satz 2. Damit A, B ein ausgezeichnetes Paar bilden, ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichungen

$$(13.) \qquad M(x) = \text{B}N(x)$$

und

$$(14.) \qquad N(x) = \text{A}M(x)$$

je eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen den Scharen A(F) *und* B(G) definieren, wenn man unter den $N(x)$ Funktionen aus A(F), unter den $M(x)$ Funktionen aus B(G) versteht.

Dabei brauchen aber die Gleichungen (13.) und (14.) keineswegs Auflösungen voneinander zu sein, es können also durch (13.) und (14.) zwei ganz verschiedene Abbildungen definiert sein.

Satz 3. Damit A, B ein ausgezeichnetes Paar bilden, ist notwendig und hinreichend, daß jede Funktion $G(x)$ aus (G) eine *eindeutige Zerlegung*

$$(15.) \qquad G(x) = N(x) + \Psi(x)$$

und jede Funktion $F(x)$ aus (F) eine *eindeutige Zerlegung*

$$(16.) \qquad F(x) = M(x) + \Phi(x)$$

besitzt, wobei $N(x)$, $M(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ Funktionen aus $\mathsf{A}(F)$, $\mathsf{B}(G)$, $(F)_{\mathsf{A}}$, $(G)_{\mathsf{B}}$ bedeuten.

Satz 4. Damit A, B ein ausgezeichnetes Paar bilden, ist notwendig und hinreichend, daß sie folgende vier Eigenschaften haben:

Eigenschaft r_1. $\mathsf{R}(F) = \mathsf{B}(G)$.

Eigenschaft r_2. $(F)_{\mathsf{R}} = (F)_{\mathsf{A}}$.

Eigenschaft s_1. $\mathsf{S}(G) = \mathsf{A}(F)$.

Eigenschaft s_2. $(G)_{\mathsf{S}} = (G)_{\mathsf{B}}$.

Wendet man die Abbildungen (13.), (14.) nacheinander an, so ergibt sich der folgende Satz:

Satz 5. Ist A, B ein ausgezeichnetes Paar, so definiert die Gleichung

$$M(x) = \mathsf{R}M'(x) \tag{17.}$$

eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathsf{B}(G)$ *auf sich selbst* und die Gleichung

$$N(x) = \mathsf{S}N'(x) \tag{18.}$$

eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathsf{A}(F)$ *auf sich selbst**).

Über das Rechnen mit den Operationen R, S ist noch folgendes zu bemerken. Es gilt die Vertauschungsregel:

$$\mathsf{RB} = \mathsf{BS},$$

aus der noch für beliebige Konstanten $a_0, a_1, \ldots a_r$ folgt:

$$(a_0\mathsf{R}^0 + a_1\mathsf{R} + \cdots + a_r\mathsf{R}^r)\,\mathsf{B} = \mathsf{B}\,(a_0\mathsf{S}^0 + a_1\mathsf{S} + \cdots + a_r\mathsf{S}^r).$$

Sind also die Funktionen $M(x)$ und $N(x)$ einander durch die Abbildung

---

*) Auch diese Doppeleigenschaft ist für ein ausgezeichnetes Paar *charakteristisch.* Man kann sie nämlich in die vier Eigenschaften

$$\varrho_1.)\quad \mathsf{RB}(G) = \mathsf{B}(G), \qquad \varrho_2.)\quad (G)_{[\mathsf{R}\,\mathsf{B}]} = (G)_{\mathsf{B}},$$
$$\sigma_1.)\quad \mathsf{SA}(F) = \mathsf{A}(F), \qquad \sigma_2.)\quad (F)_{[\mathsf{S}\mathsf{A}]} = (F)_{\mathsf{A}}$$

zerlegen. Aus diesen Eigenschaften folgen aber vermöge der Beziehungen

$$\mathsf{BAB}(G) \leqq \mathsf{BA}(F) \leqq \mathsf{B}(G), \qquad (F)_{\mathsf{A}} \leqq (F)_{[\mathsf{B}\,\mathsf{A}]} \leqq (F)_{[\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\mathsf{A}]},$$
$$\mathsf{ABA}(F) \leqq \mathsf{AB}(G) \leqq \mathsf{A}(F), \qquad (G)_{\mathsf{B}} \leqq (G)_{[\mathsf{A}\,\mathsf{B}]} \leqq (G)_{[\mathsf{B}\,\mathsf{A}\,\mathsf{B}]},$$

welche für jedes den Bedingungen $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$, $\mathsf{B}(G) \leqq (F)$ genügende Paar A, B gelten, die Eigenschaften eines ausgezeichneten Paares, nämlich r_1 aus ϱ_1, r_2 aus σ_2, s_1 aus σ_1, s_2 aus ϱ_2.

Zugleich erhält man Satz 5. selbst in der genaueren Fassung: aus r_1 und s_1 zusammen folgen ϱ_1 und σ_1, aus r_2 und s_2 zusammen folgen ϱ_2 und σ_2.

(13.) zugeordnet, so sind auch $\mathsf{R}M(x)$ und $\mathsf{S}N(x)$ einander durch die Abbildung (13.) zugeordnet und ebenso $(a_0\mathsf{R}^0 + a_1\mathsf{R} + \cdots + a_r\mathsf{R}^r)M(x)$ und $(a_0\mathsf{S}^0 + a_1\mathsf{S} + \cdots + a_r\mathsf{S}^r)N(x)$ einander durch die Abbildung (13.) zugeordnet. Das Gleiche gilt für die Abbildung (14.) auf Grund der Vertauschungsregel

$$\mathsf{SA} = \mathsf{AR}.$$

III. Für den Fall *endlicher* Operationen A,B sind die vier Eigenschaften r_1, r_2, s_1, s_2 eines ausgezeichneten Paares nicht von einander unabhängig.

Zunächst nämlich gilt nach (*s.*) unter I. der Satz:

Satz 6. Damit die *endlichen* Operationen A,B ein ausgezeichnetes Paar bilden, ist notwendig und hinreichend, daß die vier Operationen

$$\mathsf{A},\mathsf{B},\ \mathsf{R} = \mathsf{BA},\ \mathsf{S} = \mathsf{AB}$$

gleichen Rang haben.

Die vier Bedingungen für ein ausgezeichnetes Paar reduzieren sich daher für den Fall endlicher Operationen zunächst auf drei. Es tritt aber noch eine weitere Reduktion ein, weil nach (12.) für jedes den Bedingungen $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$, $\mathsf{B}(G) \leqq (F)$ genügende Paar endlicher A,B die Beziehungen

$$\text{Rg. } \mathsf{R} \leqq \text{Rg. } \mathsf{A},\ \text{Rg. } \mathsf{S} \leqq \text{Rg. } \mathsf{B},$$
$$\text{Rg. } \mathsf{R} \leqq \text{Rg. } \mathsf{B},\ \text{Rg. } \mathsf{S} \leqq \text{Rg. } \mathsf{A}$$

bestehen. Aus den beiden ersteren folgt, daß bereits aus den zwei Annahmen Rg. R = Rg. B, Rg. S = Rg. A geschlossen werden kann, daß die vier Operationen $\mathsf{A},\mathsf{B},\mathsf{R},\mathsf{S}$ gleichen Rang haben. Aus den beiden letzteren folgt, daß bereits aus den zwei Annahmen Rg. R = Rg. A, Rg. S = Rg. B geschlossen werden kann, daß die vier Operationen $\mathsf{A},\mathsf{B},\mathsf{R},\mathsf{S}$ gleichen Rang haben. Es gelten daher die Sätze:

Satz 7. Damit die *endlichen* Operationen A,B ein ausgezeichnetes Paar bilden, ist notwendig und hinreichend, daß sie die Eigenschaften r_1 und s_1 besitzen.

Satz 8. Damit die *endlichen* Operationen A,B ein ausgezeichnetes Paar bilden, ist notwendig und hinreichend, daß sie die Eigenschaften r_2 und s_2 besitzen.

Ist aber von einem der Bedingung $\mathsf{B}(G) \leqq (F)$ genügenden Paare linearer Operationen A,B für $(F),(G)$ die Operation A endlich, so ist auch $\mathsf{S} = \mathsf{AB}$ endlich und, wenn die Eigenschaft s_2 besteht, nach den bei (s_2) in

I. gemachten Angaben auch B endlich. Dies gibt einen Zusatz zu Satz 6. und eine Verschärfung des Satzes 8.:

Satz 6*. Wenn von den beiden Operationen eines ausgezeichneten Paares A, B die eine endlich ist, so ist auch die andere endlich.

Satz 8*. Wenn eine der Operationen A, B *endlich* ist, so ist dafür, daß A, B ein ausgezeichnetes Paar bilden, notwendig und hinreichend, daß einerseits $\mathsf{A}(F)$ und $(G)_{\mathsf{B}}$ nur die Funktion 0 gemein haben, anderseits $\mathsf{B}(G)$ nnd $(F)_{\mathsf{A}}$ nur die Funktion 0 gemein haben.

IV. Es sei A, B ein ausgezeichnetes Paar *endlicher* Operationen. Betrachten wir die Wirkung R* der Operation R auf die Schar $\mathsf{B}(G)$, so können wir wegen des Satzes 5. auf R* die am Schlusse des § 1. angestellten Betrachtungen anwenden. Es gibt also solche Konstanten $a_1, \dots a_r$, daß *für jede Funktion* $M(x)$ *aus* $\mathsf{B}(G)$ *die Gleichung*

$$M(x) = (a_1\mathsf{R} + \cdots + a_r\mathsf{R}^r)\,M(x) \tag{19.}$$

besteht. Wenden wir auf diese Gleichung die Abbildung (14.) an, so lehrt Satz 2., daß auch *für jede Funktion* $N(x)$ *aus* $\mathsf{A}(F)$ *die Gleichung*

$$N(x) = (a_1\mathsf{S} + \cdots + a_r\mathsf{S}^r)\,N(x) \tag{20.}$$

besteht, wobei also in (19.) und (20.) *dieselben* Konstanten $a_1, \dots a_r$ auftreten.

Dabei lautet die Auflösung der Gleichung (17.):

$$M'(x) = (a_1\mathsf{R}^0 + \cdots + a_r\mathsf{R}^{r-1})\,M(x),$$

die Auflösung von (18.):

$$N'(x) = (a_1\mathsf{S}^0 + \cdots + a_r\mathsf{S}^{r-1})\,N(x).$$

Ferner lautet die Auflösung von (13.):

$$\begin{aligned} N(x) &= \mathsf{A}\,(a_1\mathsf{R}^0 + \cdots + a_r\mathsf{R}^{r-1})\,M(x) \\ &= (a_1\mathsf{S}^0 + \cdots + a_r\mathsf{S}^{r-1})\,\mathsf{A}\,M(x), \end{aligned}$$

die Auflösung von (14.):

$$\begin{aligned} M(x) &= \mathsf{B}\,(a_1\mathsf{S}^0 + \cdots + a_r\mathsf{S}^{r-1})\,N(x) \\ &= (a_1\mathsf{R}^0 + \cdots + a_r\mathsf{R}^{r-1})\,\mathsf{B}\,N(x). \end{aligned}$$

Wendet man dies auf die Herstellung der Zerlegung (15.) an, welche nach dem in § 1. angegebenen, durch (6.), (4.) angedeuteten, Verfahren erfolgt, so erkennt man, daß in der Zerlegung (15.) die Funktion $N(x)$ durch $N(x) = (a_1\mathsf{S} + \cdots + a_r\mathsf{S}^r)G(x)$ gegeben ist; man hat also den Satz:

Satz 9. Ist A, B ein ausgezeichnetes Paar *endlicher* Operationen, so werden unter Benutzung der eingeführten Bezeichnungen die Zerlegungen (15.) und (16.) des Satzes 3. gegeben durch:

$$(15'.) \qquad N(x) = (a_1 \mathsf{S} + \cdots + a_r \mathsf{S}^r)\, G(x),$$

$$(16'.) \qquad M(x) = (a_1 \mathsf{R} + \cdots + a_r \mathsf{R}^r)\, F(x).$$

§ 3. Reziproke Paare linearer Operationen.

Wir bezeichnen allgemein mit $\bar{c}$ die zu der Konstanten c konjugiert-komplexe Konstante und mit $\bar{F}(x)$ diejenige Funktion, die aus der ganzen rationalen Funktion $F(x)$ durch Übergang zu den konjugiert-komplexen Koeffizienten entsteht. Ist (F) eine Funktionenmenge, so bezeichnen wir mit $\overline{(F)}$ die Gesamtheit derjenigen Funktionen $\bar{F}(x)$, für welche $F(x)$ zu (F) gehört.

I. Es sei eine (endliche oder nichtendliche) Schar (F) gegeben. Unter einer *Faltung* der Schar (F) verstehen wir eine Vorschrift, vermöge welcher je zwei in bestimmter Reihenfolge gegebenen Funktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ aus (F) eine Konstante, die wir mit

$$\bar{F}_1(\cdot)\, F_2(\cdot)$$

bezeichnen, zugeordnet ist, und zwar so, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1.) $\bar{F}_1(\cdot) F_2(\cdot)$ ist bilinear in bezug auf die beiden Funktionen $\bar{F}_1(x)$ und $F_2(x)$, d. h.

für $F_1(x) = F_3(x) + F_4(x)$ ist $\bar{F}_1(\cdot) F_2(\cdot) = \bar{F}_3(\cdot) F_2(\cdot) + \bar{F}_4(\cdot) F_2(\cdot)$,

für $F_2(x) = F_3(x) + F_4(x)$ ist $\bar{F}_1(\cdot) F_2(\cdot) = \bar{F}_1(\cdot) F_3(\cdot) + \bar{F}_1(\cdot) F_4(\cdot)$,

für $F_1(x) = c F_3(x)$ ist $\bar{F}_1(\cdot) F_2(\cdot) = \bar{c} \bar{F}_3(\cdot) F_2(\cdot)$,

für $F_2(x) = c F_3(x)$ ist $\bar{F}_1(\cdot) F_2(\cdot) = c \bar{F}_1(\cdot) F_3(\cdot)$;

darin bedeuten $F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x)$ beliebige Funktionen aus (F), c eine beliebige Konstante.

2.) Nimmt man für $F_1(x)$ und $F_2(x)$ dieselbe Funktion $F(x)$, und ist diese von 0 verschieden, so ist $\bar{F}_1(\cdot) F_2(\cdot)$ reell und positiv, d. h.

$$(21.) \qquad \bar{F}(\cdot) F(\cdot) > 0, \text{ wenn } F(x) \neq 0.$$

Satz 10. Sind $F_1(x), \ldots F_\varrho(x)$ Funktionen aus (F), und wird

$$m_{\alpha\beta} = \bar{F}_\alpha(\cdot) F_\beta(\cdot)$$

gesetzt, so ist $\sum_{\alpha,\beta} m_{\alpha\beta}\bar{u}_\alpha u_\beta$ eine *nichtnegative Hermitesche Form* der Variablen $u_1, \dots u_\varrho$.

Denn bildet man für irgend ein System von Konstanten $u_1, \dots u_\varrho$ die zu (F) gehörige Funktion

$$F(x) = u_1 F_1(x) + \cdots + u_\varrho F_\varrho(x),$$

so wird

$$\sum_{\alpha,\beta} m_{\alpha\beta}\,\bar{u}_\alpha u_\beta = \overline{F}(\cdot)\,F(\cdot).$$

Aus diesem Satze, u. zw. schon aus dem Reellsein der *Hermite*schen Form, folgt für $\varrho = 2$:

Satz 11. Ist $\overline{F}_1(\cdot)\,F_2(\cdot) = c$, so ist $\overline{F}_2(\cdot)\,F_1(\cdot) = \bar{c}$.

Aus dem zum Beweise von Satz 10. Bemerkten folgt zugleich:

Satz 12. Sind $F_1(x), \dots F_\varrho(x)$ *linearunabhängige* Funktionen aus (F) und wird $m_{\alpha\beta} = \overline{F}_\alpha(\cdot)\,F_\beta(\cdot)$ gesetzt, so ist $\sum_{\alpha,\beta} m_{\alpha\beta}\bar{u}_\alpha u_\beta$ eine *positive Hermitesche Form**) und daher die Determinante

$$\text{Det.}\,|m_{\alpha\beta}| > 0.$$

Zwei Funktionen $F_1(x), F_2(x)$ aus (F) heißen, in bezug auf eine gegebene Faltung von (F), *orthogonal*, wenn sie den, nach Satz 11. gleichbedeutenden, Gleichungen

$$\overline{F}_1(\cdot)\,F_2(\cdot) = 0,\quad \overline{F}_2(\cdot)\,F_1(\cdot) = 0$$

genügen. Nach (21.) *ist 0 die einzige zu sich selbst orthogonale Funktion.*

---

*) Im Anschluß hieran können wir für den Fall einer *endlichen* Schar (F) die allgemeinste Faltung konstruieren. Wir setzen Rg. $(F) = \varrho$ und legen für (F) ein Koordinatensystem mit den Koordinaten $\xi_1, \dots \xi_\varrho$ fest. Ferner wählen wir eine positive *Hermite*sche Form $\Sigma h_{\alpha\beta}\bar{\xi}_\alpha\xi_\beta$ von ϱ Variablen. Nun setzen wir, wenn $F(x)$ mit den Koordinaten (ξ) und $F'(x)$ mit den Koordinaten (ξ') irgend zwei Funktionen aus (F) sind,

$$\overline{F}(\cdot)\,F'(\cdot) = \Sigma h_{\alpha\beta}\bar{\xi}_\alpha\xi'_\beta.$$

Nehmen wir, unter Festhaltung des Koordinatensystems, alle möglichen positiven *Hermite*schen Formen, so erhalten wir alle Faltungen für (F).

Zu einer gegebenen Faltung kann man auf unendlich viele Arten das Koordinatensystem so wählen, daß die Faltung durch

$$\overline{F}(\cdot)\,F'(\cdot) = \bar{\xi}_1\xi'_1 + \cdots + \bar{\xi}_\varrho\xi'_\varrho$$

dargestellt wird.

Daß es auch für jede nichtendliche Schar mindestens eine Faltung gibt, wird in § 4 VI. gezeigt.

Wenn die Funktionen $F_1(x), \ldots F_\varrho(x)$ aus (F) sämtlich von 0 verschieden und im Falle $\varrho > 1$ paarweise orthogonal sind, so sind sie linearunabhängig. Eine *Funktion* aus (F) heißt zu einer *Schar* $\leqq (F)$ *orthogonal*, wenn sie zu jeder Funktion derselben orthogonal ist; die Funktion 0 ist zu jeder Schar $\leqq (F)$ orthogonal. Zwei *Scharen* $\leqq (F)$ heißen *orthogonal*, wenn jede Funktion der einen zu jeder Funktion der anderen orthogonal ist. *Zwei orthogonale Scharen haben nur die Funktion 0 gemein;* denn eine jeder von beiden angehörige Funktion müßte zu sich selbst orthogonal sein. Ist eine Schar $(M) \leqq (F)$ vorgelegt, so kann die Gesamtheit aller derjenigen Funktionen aus (F), welche zu der Schar (M) orthogonal sind, kurz *die größte zu* (M) *orthogonale Schar* genannt werden, wofern die Schar (F) und ihre Faltung als bekannt gelten.

Wir wollen jetzt zeigen, daß zwei Scharen $\leqq (F)$, welche sowohl *orthogonal* als auch *komplementär in* (F) sind, sich gegenseitig bestimmen, wofern die Schar (F) und ihre Faltung bekannt ist; es gilt nämlich der Satz:

Satz 13. Sind die Scharen $(M) \leqq (F)$ und $(\Phi) \leqq (F)$ sowohl orthogonal als auch komplementär in (F), so ist (Φ) die größte zu (M) orthogonale und (M) die größte zu (Φ) orthogonale Schar.

Sei nämlich $F_0(x)$ eine Funktion aus der größten zu (M) orthogonalen Schar, d. h. eine Funktion aus (F), welche der Bedingung

$$\overline{M}(\cdot)\, F_0(\cdot) = 0 \text{ für alle } M(x) \text{ aus } (M) \tag{22.}$$

genügt. Da (M) und (Φ) komplementär in (F) sind, kann man

$$F_0(x) = M_0(x) + \Phi_0(x)$$

setzen, worin $M_0(x)$ zu (M), $\Phi_0(x)$ zu (Φ) gehört. Dann ist $\overline{M}(\cdot)\, \Phi_0(\cdot) = 0$ für jede Funktion $M(x)$ aus (M), weil (M) und (Φ) orthogonal sind. Folglich genügt $M_0(x)$ der Bedingung

$$\overline{M}(\cdot)\, M_0(\cdot) = 0 \text{ für alle } M(x) \text{ aus } (M),$$

insbesondere ist daher $\overline{M}_0(\cdot)\, M_0(\cdot) = 0$, mithin $M_0(x) = 0$, also $F_0(x) = \Phi_0(x)$. Die einzigen der Bedingung (22.) genügenden Funktionen $F_0(x)$ aus (F) sind daher die Funktionen von (Φ). Ebenso ergibt sich die zweite Behauptung.

Ist eine Schar $(M) \leqq (F)$ vorgelegt, so kann man die größte zu (M) orthogonale Schar (Φ) bilden und die Frage aufwerfen, ob (M) und

(Φ) in (F) komplementär sind. Wir betrachten zwei besondere Fälle.

Ist (M) eine *endliche* Schar $\leqq (F)$ und (Φ) die größte zu (M) orthogonale Schar, so sind (M) und (Φ) in (F) komplementär. Um nämlich eine Funktion $F(x)$ aus (F) in die Summe einer Funktion $M(x)$ aus (M) und einer Funktion $\Phi(x)$ aus (Φ) zu spalten, bezeichne man mit ϱ den Rang von (M), wähle, wenn $\varrho > 0$, ϱ linearunabhängige Funktionen $M_1(x), \dots M_\varrho(x)$ aus (M) und bestimme in $M(x) = u_1 M_1(x) + \cdots + u_\varrho M_\varrho(x)$ die Konstanten $u_1, \dots u_\varrho$ so, daß die Differenz $\Phi(x) = F(x) - M(x)$ zu jeder der ϱ Funktionen $M_1(x), \dots M_\varrho(x)$ orthogonal ist; diese Forderung gibt für $u_1, \dots u_\varrho$ lineare Gleichungen, deren Determinante nach Satz 12. nicht verschwindet*).

Sind die Scharen $(M_0), (\Phi)$ in (F) komplementär und (M_0) *endlich* und vom Range ϱ, so ist die größte zu (Φ) orthogonale Schar (M), da sie mit (Φ) nur die Funktion 0 gemein hat, endlich und ihr Rang $\leqq \varrho$; und (M) und (Φ) sind dann und nur dann komplementär in (F), wenn (M) genau den Rang ϱ hat. Ist z. B. für (F) eine *endliche* lineare Operation A vom Range ϱ gegeben, so ist die größte zu $(F)_A$ orthogonale Schar (M) endlich und ihr Rang $\leqq \varrho$; und die Schar (M) ist dann und nur dann Grundbereich für A, wenn sie genau den Rang ϱ hat.

II. Es seien (F), (G) (endliche oder nichtendliche) Scharen, A eine lineare Operation für (F), B eine lineare Operation für (G) und $A(F) \leqq (G)$, $B(G) \leqq (F)$.

Ferner sei aber für jede der Scharen (F) und (G) eine bestimmte Faltung gegeben. Wir unterscheiden dieselben durch die Zeichen $\cdot$ und $\cdot\cdot$.

Definition**). A, B heißen ein *reziprokes Paar* in bezug auf die gegebenen Faltungen, wenn sie die folgende Forderung erfüllen: ist $F(x)$

---

*) Ist speziell (F) selbst *endlich*, so folgt aus dem Komplementärsein, daß Rg. (M) + Rg. (Φ) = Rg. (F) ist. Zeigt man dies direkt mit Hilfe eines Koordinatensystems für (F), so kann man, da (M) und (Φ) nur die Funktion 0 gemein haben, hieraus das Komplementärsein schließen.

Zu jedem Paare in der endlichen Schar (F) komplementärer Scharen $(M), (\Phi)$ gibt es Faltungen, denen gegenüber sie orthogonal sind.

**) Für den speziellen Fall *endlicher* Scharen $(F), (G)$ kommt diese Definition, wenn man in (F) ein Koordinatensystem $\xi_1, \dots \xi_\varrho$, in (G) ein Koordinatensystem $\eta_1, \dots \eta_\sigma$ einführt, auf eine Matrizengleichung hinaus. Stellt man nämlich, im Sinne früherer Fußnoten, die Faltungen $\cdot, \cdot\cdot$ durch $\Sigma h_{\alpha i} \bar{\xi}_\alpha \xi'_i$, $\Sigma k_{\beta j} \overline{\eta}_\beta \eta'_j$ und die Operationen A, B durch

eine beliebige Funktion aus (F), $G(x)$ eine beliebige Funktion aus (G), und bildet man die Funktionen

$$(23.) \qquad \begin{cases} N(x) = \mathsf{A}\,F(x), \\ M(x) = \mathsf{B}\,G(x), \end{cases}$$

so sollen stets die, nach Satz 11. gleichbedeutenden, Gleichungen bestehen:

$$(24.) \qquad \overline{F}(\cdot)M(\cdot) = \overline{N}(\cdot\cdot)G(\cdot\cdot),\ \overline{G}(\cdot\cdot)N(\cdot\cdot) = \overline{M}(\cdot)F(\cdot).$$

Es besteht nun folgender Satz:

Satz 14. Ist A, B ein reziprokes Paar, so sind die Scharen $\mathsf{A}(F)$ und $(G)_{\mathsf{B}}$ *orthogonal* in bezug auf die Faltung $\cdot\cdot$ und die Scharen $\mathsf{B}(G)$ und $(F)_{\mathsf{A}}$ *orthogonal* in bezug auf die Faltung $\cdot$.

Nehmen wir nämlich in (23.) für $G(x)$ eine Funktion $\Psi(x)$ aus $(G)_{\mathsf{B}}$, so wird $M(x) = 0$, und (24.) gibt daher $0 = \overline{N}(\cdot\cdot)\,\Psi(\cdot\cdot)$, womit die erste Behauptung bewiesen ist; die zweite ergibt sich entsprechend.

Da aber orthogonale Scharen nur die Funktion 0 gemein haben, so hat ein reziprokes Paar A, B die in § 2. mit r_2 und s_2 bezeichneten Eigenschaften, daß $\mathsf{A}(F)$ und $(G)_{\mathsf{B}}$ nur die Funktion 0 gemein haben*) und $\mathsf{B}(G)$ und $(F)_{\mathsf{A}}$ nur die Funktion 0 gemein haben. Nehmen wir nun

---

$$\mathsf{A}: \begin{array}{l} \eta_1 = a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1\varrho}\xi_\varrho \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_\sigma = a_{\sigma 1}\xi_1 + \cdots + a_{\sigma\varrho}\xi_\varrho \end{array} \qquad \mathsf{B}: \begin{array}{l} \xi_1 = b_{11}\eta_1 + \cdots + b_{1\sigma}\eta_\sigma \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_\varrho = b_{\varrho 1}\eta_1 + \cdots + b_{\varrho\sigma}\eta_\sigma \end{array}$$

dar, so kommt die Definitionsgleichung (24.) eines reziproken Paares auf die $\varrho\sigma$ Relationen $\sum_i h_{\alpha i} b_{i\beta} = \sum_j \bar{a}_{j\alpha} k_{j\beta}$ hinaus, also, wenn man $a_{j\alpha} = a'_{\alpha j}$ setzt, sodaß (a') die zu (a) transponierte Matrix bedeutet, auf die Matrizengleichung

$$(24^*.) \qquad (h)(b) = (\bar{a}')(k).$$

Sind z. B. die Koordinatensysteme so gewählt, daß (h), (k) Einheitsmatrizen sind, so ist $(b) = (\bar{a}')$, also $b_{\alpha j} = \bar{a}_{j\alpha}$, die Bedingung für ein reziprokes Paar.

*) Der Beweis kommt darauf hinaus, daß wir in (23.), (24.) zuerst die Spezialisierung $M(x) = 0$ und dann die Spezialisierung $G(x) = N(x)$ machen. Machen wir dagegen nur die zweite Spezialisierung, so ergibt sich der Satz: ist A, B ein reziprokes Paar, $F(x)$ eine *beliebige* Funktion aus (F), und setzt man

$$N(x) = \mathsf{A}\,F(x),$$
$$M(x) = \mathsf{BA}\,F(x),$$

so ist

$$(25.) \qquad \overline{F}(\cdot)\,M(\cdot) = \overline{N}(\cdot\cdot)N(\cdot\cdot).$$

Dies ist eine in $F(x)$ identische Gleichung, welche, wenn man nachträglich die erste Spezialisierung hinzufügt, die Eigenschaft r_2 (§ 2.) in Evidenz setzt, daß aus $M(x) = 0$ stets $N(x) = 0$ folgt.

speziell an, daß eine der Operationen A, B *endlich* ist, so bilden sie nach Satz 8*. ein ausgezeichnetes Paar, und nach Satz 6*. ist auch die andere endlich; es gelten also die Sätze:

Satz 15. *Jedes reziproke Paar endlicher Operationen* A, B *ist ein ausgezeichnetes Paar.*

Satz 15*. Ist von den beiden Operationen eines reziproken Paares A, B die eine endlich, so ist auch die andere endlich.

Nach Satz 15. kann man auf ein reziprokes Paar *endlicher* Operationen die Sätze 2., 3., 5., 9. anwenden.

Insbesondere zeigt Satz 3. in Verbindung mit Satz 14., daß für ein reziprokes Paar *endlicher* Operationen $\mathsf{A}(F)$ und $(G)_{\mathsf{B}}$ sowohl orthogonal in bezug auf die Faltung $\cdot\cdot$ als auch komplementär in (G) sind und Entsprechendes für $\mathsf{B}(G)$ und $(F)_{\mathsf{A}}$ gilt*). Nach Satz 13. ergibt sich also:

Satz 16. Ist A, B ein reziprokes Paar *endlicher* Operationen, so ist $(G)_{\mathsf{B}}$ die Gesamtheit derjenigen Funktionen $\Psi(x)$ aus (G), welche der Bedingung

$$\overline{N}(\cdot\cdot)\,\Psi(\cdot\cdot) = 0 \text{ für alle } N(x) \text{ aus } \mathsf{A}(F)$$

genügen, und $\mathsf{A}(F)$ die Gesamtheit derjenigen Funktionen $N(x)$ aus (G), welche der Bedingung

$$\overline{N}(\cdot\cdot)\,\Psi(\cdot\cdot) = 0 \text{ für alle } \Psi(x) \text{ aus } (G)_{\mathsf{B}}$$

genügen; entsprechend hängen $\mathsf{B}(G)$ und $(F)_{\mathsf{A}}$ zusammen.

---

*) Sind zwei gegebene Scharen (M), (Φ) sowohl in (F) komplementär als auch in bezug auf die Faltung $\cdot$ orthogonal, sind ferner zwei gegebene Scharen $(N), (\Psi)$ sowohl in (G) komplementär als auch in bezug auf die Faltung $\cdot\cdot$ orthogonal, und sind (M) und (N) beide *endlich* und vom *gleichen* Range ϱ, so können wir das allgemeinste den Bedingungen $\mathsf{A}(F) = (N)$, $\mathsf{B}(G) = (M)$, $(F)_{\mathsf{A}} = (\Phi)$, $(G)_{\mathsf{B}} = (\Psi)$ genügende reziproke Paar A, B für (F), (G) konstruieren. Man konstruiere nämlich zunächst für (M), (N) ein Paar A^*, B^* vom Range ϱ, welches reziprok ist bezüglich derjenigen Faltungen für (M), (N), die durch Anwendung der für (F), (G) definierten Faltungen $\cdot, \cdot\cdot$ entstehen. Dies geschieht, indem man für (M), (N) Koordinatensysteme einführt, in allgemeinster Weise durch zwei lineare Transformationen von nichtverschwindenden Determinanten in je ϱ Koordinaten, deren Matrices (a), (b) der zu (24*.) analogen Gleichung $(m)(b) = (a')(n)$ genügen, worin die Matrices $(m), (n)$ den Faltungen von $(M), (N)$ entsprechen. Hierauf setze man, wenn $F(x) = M(x) + \Phi(x)$, $G(x) = N(x) + \Psi(x)$ ist, worin $F(x), M(x), \ldots$ Funktionen aus $(F), (M), \ldots$ bedeuten, $\mathsf{A}F(x) = \mathsf{A}^* M(x)$, $\mathsf{B}G(x) = \mathsf{B}^* N(x)$.

Satz 16. lehrt erstlich die gegenseitige Bestimmtheit von $\mathsf{A}(F)$ und $(G)_\mathsf{B}$ sowie von $\mathsf{B}(G)$ und $(F)_\mathsf{A}$. Angenommen nämlich, es sei die Schar (G) und ihre Faltung bekannt, und es sei ferner die Tatsache bekannt, daß A, B ein reziprokes Paar endlicher Operationen für (F), (G) bilden. Dann ist jede der Scharen $\mathsf{A}(F)$, $(G)_\mathsf{B}$ schon durch die andere bestimmt, ohne daß es der Kenntnis von (F), A, B bedürfte.

Satz 16. gibt aber zweitens auch eine Bedingung für jede einzelne der Operationen A, B. Hat nämlich die für (F) gegebene endliche lineare Operation A vom Range ϱ die Eigenschaft Teil eines reziproken Paares A, B zu sein, so muß die Gesamtheit (M) aller derjenigen Funktionen $M(x)$ aus (F), welche der Bedingung

$$\overline{\Phi}(\cdot)\, M(\cdot) = 0 \text{ für alle } \Phi(x) \text{ aus } (F)_\mathsf{A}$$

genügen, eine zu $(F)_\mathsf{A}$ komplementäre Schar bilden, m. a. W. den Rang ϱ haben*).

III. Wir wollen einen Satz beweisen, der besagt, daß sich die Operationen A, B eines reziproken Paares, mögen sie endlich sein oder nicht, gegenseitig bestimmen, wofern die Scharen (F), (G) und ihre Faltungen bekannt sind.

Satz 17. Ist für jede der Scharen (F), (G) eine Faltung $\cdot, \cdot\cdot$ definiert und ist eine (endliche oder nichtendliche) der Bedingung $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$ genügende lineare Operation A für (F) gegeben, so gibt es *höchstens eine* solche der Bedingung $\mathsf{B}(G) \leqq (F)$ genügende lineare Operation B für (G), daß A, B ein reziprokes Paar in bezug auf die gegebenen Faltungen bilden.

Sind nämlich A, B und A_1, B_1 reziproke Paare für dieselben Faltungen und $F(x)$, $G(x)$ beliebige Funktionen aus (F), (G), so bestehen, wenn

---

*) Daß auch umgekehrt jede endliche lineare Operation A von dieser Beschaffenheit Teil eines reziproken Paares A, B ist wird in § 10 III. bewiesen werden. Man kann es aber auch so einsehen: bildet man die Gesamtheit (Ψ) aller derjenigen Funktionen $\Psi(x)$ aus (G), welche der Bedingung

$$\overline{N}(\cdot\cdot)\, \Psi(\cdot\cdot) = 0 \text{ für alle } N(x) \text{ aus } \mathsf{A}(F)$$

genügen, so sind, weil $\mathsf{A}(F)$ endlich ist, $\mathsf{A}(F)$ und (Ψ) komplementär in (G); man hat also die Sachlage der vorigen Fußnote und B^* durch $(b) = (m)^{-1}(\bar{a}')(n)$ zu bestimmen, womit die Existenz von B bewiesen ist.

Man sieht zugleich, daß es nur ein B gibt; dies ist ein Spezialfall des Satzes 17.

$$N(x) = \mathsf{A}F(x), \quad N_1(x) = \mathsf{A}_1 F(x),$$
$$M(x) = \mathsf{B}G(x) \quad M_1(x) = \mathsf{B}_1 G(x)$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$\overline{N}(\cdot\cdot)\, G(\cdot\cdot) = \overline{F}(\cdot)\, M(\cdot) \quad \text{und} \quad \overline{N}_1(\cdot\cdot)\, G(\cdot\cdot) = \overline{F}(\cdot)\, M_1(\cdot).$$

Wird nun $\mathsf{A} = \mathsf{A}_1$ angenommen, so ist $N(x) = N_1(x)$, also $\overline{F}(\cdot) M(\cdot) = \overline{F}(\cdot) M_1(\cdot)$. Wählt man hierin $F(x) = M(x) - M_1(x)$, so wird $\overline{F}(\cdot) F(\cdot) = 0$, mithin $F(x) = 0$; also ist $M(x) = M_1(x)$, daher, weil dies für jede $G(x)$ aus (G) gilt, $\mathsf{B} = \mathsf{B}_1$.

IV. Für die Anwendungen ist folgende unmittelbar einleuchtende Bemerkung wichtig. Für die Scharen (F), (G) seien Faltungen und ein (endliches oder nichtendliches) reziprokes Paar A, B gegeben. Es sei nun (F^*) eine Schar $\leqq (F)$, A^* die Wirkung von A auf (F^*), und man setze für (F^*) diejenige Faltung fest, welche durch Anwendung der für (F) gegebenen Faltung entsteht; es sei (G^*) eine Schar $\leqq (G)$, B^* die Wirkung von B auf (G^*), und man setze für (G^*) diejenige Faltung fest, welche durch Anwendung der für (G) gegebenen Faltung entsteht. Wenn dann die Bedingungen $\mathsf{A}(F^*) \leqq (G^*)$, $\mathsf{B}(G^*) \leqq (F^*)$ erfüllt sind, so bilden A^*, B^* ein reziprokes Paar für (F^*), (G^*) in bezug auf die festgesetzten Faltungen.

V. Auf den Begriff eines reziproken Paares läßt sich der folgende kompliziertere Ansatz zurückführen.

Es seien $h + k$ Scharen $(F^{(1)}), \ldots (F^{(h)}); (G^{(1)}), \ldots (G^{(k)})$ gegeben und für jede von ihnen eine bestimmte Faltung definiert. Ferner sei für jedes der $h \cdot k$ Paare $(F^{(i)})$, $(G^{(j)})$ von Scharen ein reziprokes*) Paar A_{ij}, B_{ij} von linearen Operationen gegeben.

Wir bilden nun im Gebiete der $n + h + k$ Variablen $x_1, \ldots x_n$; $\lambda_1, \ldots \lambda_h$; $\mu_1, \ldots \mu_k$ die beiden folgenden Scharen: die Schar (F) der Funktionen

$$F(x; \lambda) = \lambda_1 F^{(1)}(x) + \cdots + \lambda_h F^{(h)}(x),$$

worin $F^{(1)}(x)$ eine beliebige Funktion aus $(F^{(1)}), \ldots F^{(h)}(x)$ eine beliebige Funktion aus $(F^{(h)})$ bedeutet; die Schar (G) der Funktionen

---

*) Dabei bezieht sich der Begriff reziprok immer auf die vorher festgelegten Faltungen, sodaß also die für die Reziprozität von $\mathsf{A}_{ij}, \mathsf{B}_{ij}$ maßgebende Faltung der Schar $(F^{(i)})$ nicht von j abhängt, die der Schar $(G^{(j)})$ nicht von i abhängt.

Wir bezeichnen jede der Faltungen durch einen einfachen Punkt, da Verwechslungen nicht zu besorgen sind.

$$G(x;\mu) = \mu_1 G^{(1)}(x) + \cdots + \mu_k G^{(k)}(x),$$

worin $G^{(1)}(x)$ eine beliebige Funktion aus $(G^{(1)}), \ldots G^{(k)}(x)$ eine beliebige Funktion aus $(G^{(k)})$ bedeutet. Wir definieren die Faltungen in diesen Scharen wie folgt: ist $F(x;\lambda) = \sum_i \lambda_i F^{(i)}(x)$, $F_1(x;\lambda) = \sum_i \lambda_i F_1^{(i)}(x)$, so soll

$$\overline{F}(\cdot)F_1(\cdot) = \sum_i \overline{F^{(i)}}(\cdot)F_1^{(i)}(\cdot)$$

sein; ist $G(x;\mu) = \sum_j \mu_j G^{(j)}(x)$, $G_1(x;\mu) = \sum_j \mu_j G_1^{(j)}(x)$, so soll

$$\overline{G}(\cdot)G_1(\cdot) = \sum_j \overline{G^{(j)}}(\cdot)G_1^{(j)}(\cdot)$$

sein. Diese Definitionen genügen in der Tat den an eine Faltung zu stellenden Anforderungen.

Wir definieren jetzt eine lineare Operation A für (F) und eine lineare Operation B für (G) in folgender Weise: für $F(x;\lambda) = \sum_i \lambda_i F^{(i)}(x)$ soll

$$\mathsf{A}F(x;\lambda) = \sum_{i,j} \mu_j \mathsf{A}_{ij} F^{(i)}(x) \tag{26.}$$

sein, für $G(x;\mu) = \sum_j \mu_j G^{(j)}(x)$ soll

$$\mathsf{B}G(x;\mu) = \sum_{i,j} \lambda_i \mathsf{B}_{ij} G^{(j)}(x) \tag{27.}$$

sein. Dann gilt der Satz:

Satz 18. Die eben konstruierten Operationen A, B bilden ein reziprokes Paar.

Zunächst nämlich gehört wegen $\mathsf{A}_{ij}(F^{(i)}) \leqq (G^{(j)})$, $\mathsf{B}_{ij}(G^{(j)}) \leqq (F^{(i)})$ von den Funktionen

$$N_i^{(j)}(x) = \mathsf{A}_{ij} F^{(i)}(x),$$
$$M_j^{(i)}(x) = \mathsf{B}_{ij} G^{(j)}(x)$$

die erste $N_i^{(j)}(x)$ zu $(G^{(j)})$, die zweite $M_j^{(i)}(x)$ zu $(F^{(i)})$. Setzt man also

$$N(x;\mu) = \mathsf{A}F(x;\lambda),$$
$$M(x;\lambda) = \mathsf{B}G(x;\mu),$$

so ist $N(x;\mu) = \sum_{i,j} \mu_j N_i^{(j)}(x) = \mu_1 \sum_i N_i^{(1)}(x) + \cdots + \mu_k \sum_i N_i^{(k)}(x)$ eine Funktion von (G) und $M(x;\lambda) = \sum_{i,j} \lambda_i M_j^{(i)}(x) = \lambda_1 \sum_j M_j^{(1)}(x) + \cdots + \lambda_h \sum_j M_j^{(h)}(x)$ eine Funktion von (F); es ist also

$$\mathsf{A}(F) \leqq (G),\ \mathsf{B}(G) \leqq (F).$$

Nun ist

$$\overline{F}(\cdot)\ M(\cdot) = \sum_{i,j} \overline{F^{(i)}}(\cdot)\, M_j^{(i)}(\cdot),$$
$$\overline{N}(\cdot)\ G(\cdot) = \sum_{i,j} \overline{N_i^{(j)}}(\cdot)\, G^{(j)}(\cdot).$$

Da aber $\mathsf{A}_{ij}, \mathsf{B}_{ij}$ ein reziprokes Paar bilden, so ist $\overline{F^{(i)}}(\cdot)\, M_j^{(j)}(\cdot) = \overline{N_i^{(j)}}(\cdot)\, G^{(j)}(\cdot)$, folglich ist auch

$$\overline{F}(\cdot)\, M(\cdot) = \overline{N}(\cdot)\, G(\cdot).$$

Damit ist Satz 18. bewiesen.

Sind sämtliche Operationen $\mathsf{A}_{ij}, \mathsf{B}_{ij}$ *endlich*, so sind auch A, B endlich.

Kapitel II. Abbildung isobarer Scharen durch reziproke Paare isobarer Polarenprozesse.

§ 4. Spezielle Polarenprozesse. Hauptfaltung.

I. Sind für die Schar (F) $h \geqq 1$ lineare Operationen $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_h$, die sämtlich der Bedingung $\mathsf{A}_\alpha (F) \leqq (F)$ genügen, gegeben, so stellt der Ausdruck

$$(29.) \quad a\{1\} + \sum_{\alpha} a_\alpha \mathsf{A}_\alpha + \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} \mathsf{A}_\alpha \mathsf{A}_\beta + \cdots + \sum_{\alpha,\beta,\ldots\gamma} a_{\alpha\beta\ldots\gamma} \mathsf{A}_\alpha \mathsf{A}_\beta \ldots \mathsf{A}_\gamma,$$

worin $a, a_\alpha, a_{\alpha\beta}, \ldots$ Konstanten sind und in jeder der Summen Σ die jeweils angeführten Summationsbuchstaben unabhängig von einander von 1 bis h laufen, eine lineare Operation für (F) dar. Eine lineare Operation für (F) heißt *aus* $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_h$ *ableitbar*, wenn sie sich auf mindestens eine Art in die Gestalt (29.) setzen läßt.

Wir betrachten nun speziell die aus *allen**) Funktionen bestehende Schar (Ω). Jede lineare Operation A für (Ω) genügt der Bedingung $\mathsf{A}(\Omega) \leqq (\Omega)$. Wir bilden die folgenden $2n$ speziellen linearen Operationen $\mathsf{D}_i, \mathsf{D}_i'$ für (Ω): für jede Funktion $F(x)$ aus (Ω) soll

$$(30.) \qquad \mathsf{D}_i F(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \text{ und } \mathsf{D}_i' F(x) = x_i F(x)$$

sein. Unter *Polarenprozessen* im Gebiete der Variablen $x_1, \ldots x_n$ verstehen wir die aus $\mathsf{D}_1, \ldots \mathsf{D}_n; \mathsf{D}_1', \ldots \mathsf{D}_n'$ ableitbaren linearen Operationen für (Ω).

II. Ersetzt man in dem Ausdruck (29.) jede Operation A_α durch eine Variable t_α und die Operation $\{1\}$ durch die Konstante 1, so erhält man eine ganze rationale Funktion $H(t)$ der Variablen $t_1, \ldots t_h$, und jede ganze rationale Funktion der t entsteht so aus mindestens einem Ausdruck (29.). Sind nun speziell $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_h$ *vertauschbar*, d. h. bestehen alle Relati-

---

*) Es wird an der in § 1 I. getroffenen Verabredung festgehalten, daß unter „Funktion“ ohne weiteren Zusatz eine ganze rationale Funktion der Variablen $x_1, \ldots x_n$ verstanden wird.

onen $\mathsf{A}_\alpha \mathsf{A}_\beta = \mathsf{A}_\beta \mathsf{A}_\alpha$, so stellen zwei Ausdrücke (29.), welche dieselbe Funktion $H(t)$ liefern, auch dieselbe lineare Operation für (F) dar, und diese Operation kann daher mit

$$H(\mathsf{A})$$

bezeichnet werden. Ist $H(t) = 0$, so ist $H(\mathsf{A}) = \{0\}$. Algebraische Relationen zwischen mehreren Funktionen $H(t)$ übertragen sich auf die Operationen $H(\mathsf{A})$; z. B.

(31.) aus $H(t) = H_1(t) H_2(t)$ folgt $H(\mathsf{A}) = H_1(\mathsf{A}) H_2(\mathsf{A})$

und daher auch $H_1(\mathsf{A}) H_2(\mathsf{A}) = H_2(\mathsf{A}) H_1(\mathsf{A})$.

Wir betrachten zwei spezielle Fälle, die sich beide auf die Schar (Ω) beziehen.

Die n Operationen $\mathsf{D}_1, \ldots \mathsf{D}_n$ für (Ω) aus (30.) sind vertauschbar. Die aus ihnen ableitbaren Operationen, die wir *spezielle Polarenprozesse erster Art* nennen, können daher in die Gestalt $f(\mathsf{D})$ gesetzt werden, worin $f(x)$ eine Funktion aus (Ω) bedeutet.

Wir bezeichnen die Operationen $\mathsf{D}_1, \ldots \mathsf{D}_n$ auch mit $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}$ und daher die Operation $f(\mathsf{D})$ auch mit $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Wir notieren noch eine Folgerung aus (31.): Setzt man

$$(32.) \qquad \begin{cases} K(x) = f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x), \\ M(x) = f(x)\, G(x), \end{cases}$$

so ist

$$(33.) \qquad M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) K(x).$$

Die n Operationen $\mathsf{D}'_1, \ldots \mathsf{D}'_n$ für (Ω) aus (30.) sind vertauschbar. Die aus ihnen ableitbaren Operationen, die wir *spezielle Polarenprozesse zweiter Art* nennen, können daher in die Gestalt $f(\mathsf{D}')$ gesetzt werden, worin $f(x)$ eine Funktion aus (Ω) bedeutet. Die Operation $f(\mathsf{D}')$ besteht in der Multiplikation mit der Funktion $f(x)$, d. h. es ist $f(\mathsf{D}') F(x) = f(x) F(x)$. Daher kann jeder spezielle Polarenprozeß zweiter Art nur auf eine einzige Weise in die Gestalt $f(\mathsf{D}')$ gebracht werden, d. h. aus $f(\mathsf{D}') = \{0\}$ folgt $f(x) = 0$.

Wir bezeichnen die Operationen $\mathsf{D}'_1, \ldots \mathsf{D}'_n$ auch mit $x_1, \ldots x_n$ und daher die Operation $f(\mathsf{D}')$ auch mit $f(x)$. *Daher haben wir jetzt zwischen*

Funktion $f(x)$ und Operation $f(x)$ zu unterscheiden. Wenn das Zeichen $f(x)$ ohne besondere Erklärung vorkommt, soll immer die Funktion gemeint sein.

Sind mehrere spezielle Polarenprozesse erster und zweiter Art gegeben, so werden die aus ihnen ableitbaren Operationen zwar auch Polarenprozesse, aber i. a. nicht spezielle erster oder zweiter Art sein. Z. B. kann man aus $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ und dem Prozesse $g(x)$ die Prozesse $g(x)f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ und $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)g(x)$ bilden. Dagegen entsteht aus $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ und der Funktion $g(x)$ die Funktion $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)g(x)$.

III. Unter dem *konstanten Glied* einer Funktion $F(x)$ verstehen wir den Wert, den $F(x)$ für das Wertsystem $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ der Variablen annimmt; wir bezeichnen das konstante Glied mit $[F(x)]_0$.

Setzt man zwei Funktionen $F(x)$, $F_1(x)$ in die Gestalt

$$F(x) = \Sigma a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \qquad F_1(x) = \Sigma a'_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

worin die a und a' Konstanten bedeuten und in jeder der Summen Σ kein Potenzprodukt $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ mehr als einmal auftritt, so wird

$$(34.) \qquad \left[F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F_1(x)\right]_0 = \Sigma \alpha_1! \ldots \alpha_n!\ a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\, a'_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}.$$

Daher ist stets

$$(35.) \qquad \left[F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F_1(x)\right]_0 = \left[F_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x)\right]_0.$$

Insbesondere hat man

$$(36.) \qquad \left[\overline{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x)\right]_0 = \Sigma \alpha_1! \ldots \alpha_n! \left|a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\right|^2,$$

es ist also $\left[\overline{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x)\right]_0$ reell und > 0, wenn $F(x) \neq 0$ ist.

Daraus folgt zunächst, daß

$$\overline{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x) \neq 0, \text{ wenn } F(x) \neq 0.$$

Hieraus kann man schließen, daß jeder spezielle Polarenprozeß erster Art nur auf eine einzige Weise in die Gestalt $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ gebracht werden kann; ist nämlich*) $f(x) \neq 0$, so ist die Funktion $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{f}(x) \neq 0$, also $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \neq \{0\}$.

---

*) Anderer Beweis in § 7 I.

Die in (32.) auftretenden Prozesse $f(x)$, $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ bestimmen sich daher gegenseitig; wir nennen sie transponiert.

Aus dem Umstande, daß (36.) für $F(x) \neq 0$ stets reell und positiv ist, folgt, daß durch die Festsetzung

$$\overline{F}(\cdot)\, F_1(\cdot) = \left[\overline{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F_1(x)\right]_0$$

eine Faltung der Schar (Ω) definiert ist. Wir nennen sie die *Hauptfaltung von* (Ω).

IV. Satz 19. Die Polarenprozesse $\mathsf{A} = \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ und $\mathsf{B} = f(x)$ bilden ein *reziprokes Paar* linearer Operationen für (Ω), (Ω) in bezug auf die Hauptfaltungen.

Setzt man nämlich

$$(37.) \qquad \begin{cases} N(x) = \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x), \\ M(x) = f(x)\, G(x), \end{cases}$$

so ist nach (33.)

$$(38.) \qquad \overline{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = \overline{G}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) N(x),$$

um so mehr also $\overline{M}(\cdot)\, F(\cdot) = \overline{G}(\cdot)\, N(\cdot)$.

Als reziprokes Paar linearer Operationen haben A, B die Eigenschaften r_2, s_2 (§ 2.). Die Eigenschaft s_2 besagt, daß die Scharen $\mathsf{B}(G)$ und $(F)_\mathsf{A}$ nur die Funktion 0 gemein haben. Nun ist $\mathsf{B}(G)$ die Gesamtheit der Lösungen $M(x)$ der Kongruenz

$$(39.) \qquad M(x) \equiv 0 \mod f(x),$$

$(F)_\mathsf{A}$ die Gesamtheit der Lösungen $\Phi(x)$ der Gleichung

$$0 = \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi(x).$$

s_2 gibt also den Satz: wenn eine Funktion $F(x)$ die beiden Bedingungen

$$F(x) \equiv 0 \mod f(x), \quad \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = 0$$

erfüllt, so ist $F(x) = 0$. Legt man dagegen für s_2 die Fassung „aus $\mathsf{AB}G(x) = 0$ folgt $\mathsf{B}G(x) = 0$“ zugrunde, so ergibt sich: aus $\overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)\, G(x) = 0$ folgt $f(x)\, G(x) = 0$; daraus folgt:

(40.) ist $f(x) \not\equiv 0$, $G(x) \not\equiv 0$, so ist stets $\overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)\, G(x) \not\equiv 0$.

Dagegen wird die Eigenschaft r_2 hier trivial; ist nämlich $f(x) \not\equiv 0$, so besteht $(G)_B$ nur aus der Funktion 0, ist aber $f(x) = 0$, so besteht $\mathsf{A}(F)$ nur aus der Funktion 0*).

Wir werden übrigens später sehen, daß nicht nur r_2, sondern sogar r besteht, d. h. daß $\mathsf{A}(F)$ und $(G)_B$ komplementär in (G) sind. Im Falle $f(x) = 0$ ist nämlich $(G)_B = (\Omega)$, im Falle $f(x) \not\equiv 0$ werden wir in § 6 III. zeigen, daß sich jede Funktion $G(x)$ in die Gestalt $\overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$ setzen läßt, sodaß $\mathsf{A}(F) = (G)$ ist.

Wir nennen $\overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $f(x)$ *reziproke spezielle Polarenprozesse.*

V. Ähnlich wie die Kongruenz (39.) kann man auch die Kongruenz nach einem Modulsystem $f_1(x), \ldots f_k(x)$ behandeln. Hierzu wenden wir auf die k reziproken Paare $\mathsf{A}_j = \overline{f}_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $\mathsf{B}_j = f_j(x)$ für (Ω), (Ω) und deren Hauptfaltungen die Entwicklungen aus § 3 V. für $h = 1$ an, wobei die Einführung der Variablen λ_1 offenbar entbehrlich ist. Wir bilden also im Gebiete der $n + k$ Variablen $x_1, \ldots x_n; \mu_1, \ldots \mu_k$ die Schar (G) aller Funktionen

$$G(x; \mu) = \mu_1 G_1(x) + \cdots + \mu_k G_k(x),$$

worin die $G_j(x)$ beliebige Funktionen aus (Ω) bedeuten. Als Faltung von (G) setzen wir die Hauptfaltung im Gebiete der Funktionen der $n + k$ Variablen fest; setzt man also noch $G'(x; \mu) = \mu_1 G_1'(x) + \cdots + \mu_k G_k'(x)$, so ist

$$\overline{G}(\cdot)\, G'(\cdot) = \overline{G}_1(\cdot)\, G_1'(\cdot) + \cdots + \overline{G}_k(\cdot)\, G_k'(\cdot),$$

---

*) Die Gleichung (25.), welche r_2 in Evidenz setzt, und die entsprechende für s_2 lauten hier:

25.*)
$$\left[\overline{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)\ \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)\right]_0 = \left[\overline{N}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) N(x)\right]_0,$$
$$\left[\overline{G}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) G(x)\right]_0 = \left[\overline{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) M(x)\right]_0$$

worin $N(x)$, $M(x)$ durch (37.) erklärt sind. Die zweite Gleichung gilt auch in der Verschärfung:

$$\overline{G}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)\, G(x) = \overline{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) M(x),$$

wie man aus (38.) durch die Spezialisierung $F(x) = M(x)$ erkennt.

worin rechts · die Hauptfaltung von (Ω) bedeutet. Nun definieren wir die linearen Operationen A, B für $(\Omega), (G)$ durch die für beliebige $F(x), G_1(x), \dots G_k(x)$ aus (Ω) gültigen Gleichungen

$$(41.)\quad \begin{cases} \mathsf{A}F(x) = \mu_1 \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) + \cdots + \mu_k \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x), \\ \mathsf{B}[\mu_1 G_1(x) + \cdots + \mu_k G_k(x)] = f_1(x) \quad G_1(x) + \cdots + f_k(x) G_k(x). \end{cases}$$

Dann gilt nach Satz 18. der Satz:

Satz 20. Die durch (41.) definierten A, B bilden ein *reziprokes Paar* für $(\Omega), (G)$ in bezug auf die Hauptfaltungen.

Daher haben A, B die Eigenschaften r_2, s_2 (§ 2.). Nun ist $\mathsf{B}(G)$ die Gesamtheit der Lösungen $M(x)$ der Kongruenz

$$M(x) \equiv 0 \text{ modd. } f_1(x), \dots f_k(x),$$

$(F)_\mathsf{A}$ die Gesamtheit $\Phi(x)$ der Lösungen des Gleichungssystems

$$0 = \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi(x), \dots 0 = \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi(x).$$

s_2 gibt daher den Satz: wenn eine Funktion $F(x)$ den $1 + k$ Bedingungen

$$F(x) \equiv 0 \text{ modd. } f_1(x), \dots f_k(x),$$

$$\bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = 0, \dots \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = 0$$

genügt, so ist $F(x) = 0$. Dagegen gibt die Eigenschaft r_2, daß $\mathsf{A}(F)$ und $(G)_\mathsf{B}$ nur die Funktion 0 gemein haben, den Satz: wenn k Funktionen $G_1(x), \dots G_k(x)$ sich aus einer und derselben Funktion $F(x)$ gemäß den Formeln

$$G_1(x) = \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x), \dots G_k(x) = \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$$

ableiten lassen und der Gleichung

$$0 = f_1(x)\, G_1(x) + \cdots + f_k(x)\, G_k(x)$$

genügen, so ist $G_1(x) = 0, \dots G_k(x) = 0$. Legt man aber für r_2 die Fassung „aus $\mathsf{BA}F(x) = 0$ folgt $\mathsf{A}F(x) = 0$“ zugrunde, so erhält man, da

$$(42.)\qquad \mathsf{R} = \mathsf{BA} = f_1(x)\, \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \cdots + f_k(x)\, \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

ist, den Satz*): aus der einen Gleichung

---

*) Die Gleichung (25.), welche r_2 in Evidenz setzt, lautet hier:

$$\left[\bar{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(f_1(x)\, \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \cdots + f_k(x)\, \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) F(x)\right]_0 = \sum_i \left[\bar{N}_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) N_i(x)\right]_0,$$

$$f_1(x)\,\overline{f}_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)F(x)+\cdots+f_k(x)\,\overline{f}_k\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)F(x)=0$$

folgen die k Gleichungen

$$\overline{f}_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)F(x)=0,\ \ldots\ \overline{f}_k\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)F(x)=0.$$

VI. Wendet man auf die Funktionen einer Schar (F) die Hauptfaltung von (Ω) an, so erhält man eine Faltung von (F), welche die *Hauptfaltung von* (F) heißt*).

Damit ist zugleich festgestellt, daß jede Schar (F) mindestens eine Faltung besitzt. Hieraus kann man nebenbei schließen, daß es zu jeder *endlichen* Schar $(M)\leqq(F)$ eine Schar gibt, die zu ihr in (F) komplementär ist; denn die größte zu (M) orthogonale Schar hat diese Eigenschaft.

§ 5. Isobare Funktionen.

I. Ordnet man den Potenzprodukten $x_1^{a_1}\ldots x_n^{a_n}$ mit ganzzahligen nichtnegativen Exponenten derart Konstanten zu, daß sich bei Multiplikation von Potenzprodukten die zugeordneten Konstanten addieren, so pflegt man diese Konstanten als die *Gewichte* der Potenzprodukte zu bezeichnen. Es ist dabei klar, daß man dem Potenzprodukt 1 das Gewicht 0 geben muß und daß man die Gewichte der n Potenzprodukte $x_1,\ldots x_n$ willkürlich festsetzen kann. Werden dieselben mit $h_1,\ldots h_n$ bezeichnet, so hat $x_1^{a_1}\ldots x_n^{a_n}$ das Gewicht $h_1\alpha_1+\cdots+h_n\alpha_n$.

---

worin $N_j(x)=\overline{f}_j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)F(x)$ gesetzt ist, und ist daher eine Summe von k Gleichungen (25*.). Dagegen gilt die entsprechende Gleichung für s_2 wieder in der Verschärfung

$$\sum_j \overline{G}_j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\overline{f}_j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\sum_\beta f_\beta(x)G_\beta(x)=\overline{M}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)M(x),$$

worin $M(x)=\sum_\beta f_\beta(x)G_\beta(x)$ gesetzt ist.

*) Hat eine Schar (F), für welche eine Faltung definiert ist, die besondere Eigenschaft $(\overline{F})=(F)$, so kann man für je zwei Funktionen $F_1(x)$, $F_2(x)$ aus (F) die beiden Größen $F_1(\cdot)\,F_2(\cdot)$ und $F_2(\cdot)\,F_1(\cdot)$ bilden. Dabei ist bei der Bildung von $F_1(\cdot)\,F_2(\cdot)\,F_1(x)$ zu $(\overline{F})$, $F_2(x)$ zu (F) zu rechnen, dagegen bei der Bildung von $F_2(\cdot)\,F_1(\cdot)\,F_1(x)$ zu (F), $F_2(x)$ zu $(\overline{F})$ zu rechnen. Die beiden Größen $F_1(\cdot)\,F_2(\cdot)$ und $F_2(\cdot)\,F_1(\cdot)$ brauchen nun durchaus nicht einander gleich zu sein. Die Hauptfaltung hat die besondere Eigenschaft, daß stets $F_1(\cdot)\,F_2(\cdot)=F_2(\cdot)\,F_1(\cdot)$ ist, wie aus (35.) hervorgeht.

Eine *Funktion* $F(x)$, welche von 0 verschieden ist, pflegt man *isobar vom Gewicht* h zu nennen, wenn alle in ihr (mit von 0 verschiedenen Koeffizienten) auftretenden Potenzprodukte dasselbe Gewicht h haben.

Ferner wird festgesetzt, daß die *Funktion 0* ebenfalls isobar genannt wird, und daß ihr *alle möglichen Konstanten als Gewichte* zugeordnet werden. Dank dieser Festsetzung gelten folgende Behauptungen.

Von jedem Gewicht gibt es mindestens eine isobare Funktion. Die sämtlichen isobaren Funktionen eines vorgeschriebenen Gewichts bilden eine Schar. Sind $f(x)$ und $F(x)$ isobare Funktionen von den Gewichten l und s, so sind die Funktionen $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x)$ und $f(x)F(x)$ isobar und haben die Gewichte $s-l$ und $s+l$.

Eine *Schar* heißt *isobar*, wenn jede einzelne Funktion der Schar isobar ist und alle Funktionen der Schar dasselbe Gewicht haben; dieses heißt dann auch das Gewicht der Schar.

II. Besondere Umstände treten ein, wenn die Gewichte aller von 1 verschiedenen Potenzprodukte reell und *positiv* sind, d. h. wenn

$$h_1 > 0, \ldots h_n > 0 \tag{43.}$$

ist.

In diesem Falle ist jede isobare Schar *endlich*. Ferner sind die einzigen isobaren Funktionen vom Gewicht 0 die Konstanten. Und von einem vorgeschriebenen Gewichte, welches reell und <0 (oder auch nicht reell) ist, gibt es nur eine isobare Funktion, nämlich die Funktion 0.

Sind daher $F(x)$, $F_1(x)$ isobare Funktionen und das Gewicht von $F(x)$ *größer* als das von $F_1(x)$, so ist

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F_1(x) = 0.$$

Sind aber $F(x)$, $F_1(x)$ isobare Funktionen *gleichen* Gewichts, so reduziert sich die Funktion $F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F_1(x)$ auf eine Konstante:

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F_1(x) = \left[F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F_1(x)\right]_0.$$

Daher ist nach (35.)

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F_1(x) = F_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x),$$

und die Hauptfaltung von (F) ist durch

$$\overline{F}(\cdot)\, F_1(\cdot) = \overline{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F_1(x)$$

gegeben.

Ist $h_1 = 1, \ldots h_n = 1$, so pflegt man statt isobar und Gewicht die Ausdrücke homogen und Grad zu gebrauchen.

III. Den Variablen $x_1, \ldots x_n$ seien positive Gewichte (43.) erteilt.

Ein *spezieller Polarenprozeß* erster oder zweiter Art heißt *isobar*, wenn seine Anwendung auf isobare Funktionen stets wieder isobare Funktionen gibt. So ist der Prozeß $\{0\}$ isobar.

Ist Π ein von $\{0\}$ verschiedener isobarer spezieller Polarenprozeß, so gibt es eine bestimmte reelle Zahl l derart, daß, wenn s das Gewicht einer isobaren Funktion $F(x)$ bezeichnet, stets $s + l$ das Gewicht der Funktion $\Pi F(x)$ ist. l heißt das Gewicht des Prozesses Π. Dem Prozeß $\{0\}$ werden alle möglichen Konstanten als Gewichte zugeordnet.

Der Prozeß $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ ist dann und nur dann isobar, wenn die Funktion $f(x)$ isobar ist. Der Prozeß $f(x)$ ist dann und nur dann isobar, wenn die Funktion $f(x)$ isobar ist. Hat die isobare Funktion $f(x)$ das Gewicht l, so hat der Prozeß $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ das Gewicht $-l$, der Prozeß $f(x)$ das Gewicht l.

Um die hier über isobare spezielle Polarenprozesse aufgestellten Behauptungen zu beweisen kommt es nur darauf an zu jeder nicht isobaren Funktion $f(x)$ eine solche isobare Funktion $F(x)$ zu konstruieren, daß $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$ nicht isobar ist. Hierzu genügt es, wenn $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$ gesetzt wird, worin $f_1(x), f_2(x), \ldots$ von 0 verschiedene isobare Funktionen von den Gewichten $l_1 < l_2 < \cdots$ bedeuten, $F(x) = \overline{f}_1(x)\, \overline{f}_2(x)$ zu nehmen, weil nach (40.) $f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) \neq 0$ und $f_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) \neq 0$ ist.

Ist von zwei transponierten speziellen Polarenprozessen $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $f(x)$ oder von zwei reziproken speziellen Polarenprozessen $\overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $f(x)$ der eine isobar, so ist auch der andere isobar.

§ 6. Modulsysteme, die aus isobaren Funktionen bestehen.

Wenn wir die für die Schar (Ω) aufgestellten Sätze 19., 20. gemäß der in § 3 IV. gegebenen Anweisung auf geeignete Teilscharen übertragen, so ist besonders der Fall wichtig, daß A^*, B^* *endlich* werden, weil man dann nach Satz 15. die Theorie der ausgezeichneten Paare anwenden kann. Dazu dient die Einführung der isobaren Funktionen*).

Den Variablen $x_1, \ldots x_n$ seien die Gewichte $h_1 > 0, \ldots h_n > 0$ erteilt.

I. Es sei eine *von 0 verschiedene* isobare Funktion $f(x)$ vom Gewichte l gegeben. Wir bilden die Schar (F) aller isobaren Funktionen von einem gegebenen Gewicht s und die Schar (G) aller isobaren Funktionen vom Gewicht $s-l$. Ferner bezeichnen wir mit (M) die Gesamtheit aller derjenigen Funktionen $M(x)$ von (F), welche der Kongruenz

$$M(x) \equiv 0 \mod f(x)$$

genügen, mit (Φ) die Gesamtheit aller derjenigen Funktionen $\Phi(x)$ von (F), für welche

$$0 = \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x)$$

gilt.

Wir definieren nun lineare Operationen A^*, B^* für (F), (G) durch

$$\mathsf{A}^* F(x) = \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x),$$

$$\mathsf{B}^* G(x) = f(x)\, G(x),$$

worin $F(x)$, $G(x)$ beliebige Funktionen aus (F), (G) bedeuten. A^*, B^* sind also die Wirkungen der für (Ω) definierten Polarenprozesse $\mathsf{A} = \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $\mathsf{B} = f(x)$ auf die Scharen (F), (G). Da nun $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$, $\mathsf{B}(G) \leqq (F)$ ist, so kann man aus Satz 19. schließen, daß A^*, B^* ein *reziprokes Paar* linearer Operationen für (F), (G) in bezug auf die Hauptfaltungen bilden. Da aber (F), (G) endlich sind, so sind auch A^*, B^* endlich und bilden daher nach Satz 15. ein *ausgezeichnetes Paar* für (F), (G), und man kann auf

*) Vermöge abermaliger Anwendung von § 3 IV. könnte man den Bereich aller isobaren Funktionen durch einen geeigneten Teilbereich (in der früheren Arbeit Formenstaat genannt) ersetzen. Man gewinnt aber damit wenig, weil die so entstehenden Verschärfungen der folgenden Sätze meist ohnehin aus den hier gegebenen *expliziten Formeln* unmittelbar abgelesen werden können.

sie die Sätze 2., 3., 5., 9., 16. anwenden. Dabei verwenden wir wieder die Bezeichnungen $\mathsf{R} = \mathsf{BA}$, $\mathsf{S} = \mathsf{AB}$, die also für (Ω) definierte Polarenprozesse bedeuten.

Es ist nun

$$\mathsf{B}(G) = (M), \quad (F)_{\mathsf{A}} = (\Phi).$$

Ferner

besteht $(G)_{\mathsf{B}}$ nur aus der Funktion 0,

und es ist daher, da $\mathsf{A}(F)$ und $(G)_{\mathsf{B}}$ in (G) komplementär sind,

$$\mathsf{A}(F) = (G).$$

Hiernach hat man folgende Sätze:

Jede Funktion $F(x)$ aus (F) besitzt eine eindeutige Zerlegung

(44.) $$F(x) = M(x) + \Phi(x)$$

in die Summe einer Funktion $M(x)$ aus (M) und einer Funktion $\Phi(x)$ aus (Φ).

Jede Funktion $G(x)$ aus (G) läßt sich auf mindestens eine Weise in die Gestalt

$$G(x) = \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$$

setzen, worin $F(x)$ eine Funktion von (F) bedeutet.

Durch die Gleichung

$$G(x) = \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) M(x)$$

wird eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen (M) und (G), durch die Gleichung

(45.) $$G(x) = \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)\, G'(x)$$

eine umkehrbar eindeutige Abbildung von (G) auf sich selbst definiert; dabei bedeuten $M(x)$, $G(x)$, $G'(x)$ Funktionen aus (M), (G), (G).

Es gibt solche Konstanten $a_1, \ldots a_r$, daß für jede Funktion $G(x)$ aus (G) und für jede Funktion $M(x)$ aus (M) die Beziehungen

$$G(x) = (a_1 \mathsf{S} + \cdots + a_r \mathsf{S}^r)\, G(x),$$
$$M(x) = (a_1 \mathsf{R} + \cdots + a_r \mathsf{R}^r)\, M(x)$$

gelten.

Die Auflösung von (45.) ist durch

$$G'(x) = (a_1 \mathsf{S}^0 + \cdots + a_r \mathsf{S}^{r-1})\, G(x)$$

gegeben. Die Gleichung

$$M(x) = f(x)\, G(x),$$

in welcher $G(x)$ eine Funktion von (G) bedeutet, hat die Auflösung

$$G(x) = \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(a_1 \mathsf{R}^0 + \cdots + a_r \mathsf{R}^{r-1})\, M(x).$$

In der Zerlegung (44.) ist $M(x)$ durch

$$M(x) = (a_1 \mathsf{R} + \cdots + a_r \mathsf{R}^r)\, F(x)$$

gegeben.

Aus Satz 16. erhalten wir zunächst den Satz:

Wenn eine Funktion $\overline{M}(x)$ aus (F) die Eigenschaft hat, daß für jede der Gleichung $\overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x) = 0$ genügende Funktion $\Phi(x)$ aus (F) auch die Gleichung $\overline{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x) = 0$ besteht, so ist $\overline{M}(x) \equiv 0$ mod. $f(x)$.

Ferner gibt Satz 16. zwei Sätze, die auch unabhängig davon leicht einzusehen sind: Wenn eine Funktion $\Phi(x)$ aus (F) der Bedingung

$$\overline{G}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x) = 0 \text{ für alle } G(x) \text{ aus } (G)$$

genügt, so ist $\overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x) = 0$. Wenn eine Funktion $\Psi(x)$ aus (G) der Bedingung

$$\overline{\Psi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x) = 0 \text{ für alle } F(x) \text{ aus } (F)$$

genügt, so ist $\Psi(x) = 0$. Diese Sätze ergeben sich nämlich unmittelbar, indem man die Voraussetzungen auf die Funktionen $G(x) = \overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x)$, bzw. $F(x) = \Psi(x)\, f(x)$ anwendet.

II. Es seien k isobare Funktionen $f_1(x), \ldots f_k(x)$ von den Gewichten $l_1, \ldots l_k$ gegeben. Wir bilden die Schar (F) aller isobaren Funktionen von einem gegebenen Gewicht s und die Scharen $(G_1), \ldots (G_k)$, worin (G_j) die Schar aller isobaren Funktionen vom Gewichte $s - l_j$ bedeutet. Wir bezeichnen mit (M) die Gesamtheit aller derjenigen Funktionen $M(x)$ aus (F), welche der Kongrenz

$$M(x) \equiv 0 \text{ modd. } f_1(x), \ldots f_k(x)$$

genügen, mit (Φ) die Gesamtheit aller derjenigen Funktionen $\Phi(x)$ aus (F), welche dem System von Gleichungen

$$0 = \overline{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x), \ldots\ 0 = \overline{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x)$$

genügen. Ferner bezeichnen wir mit $((N))$ die Gesamtheit aller Systeme $N_1(x), \dots N_k(x)$ von je k Funktionen aus bzw. $(G_1), \dots (G_k)$ von der Beschaffenheit, daß sie sich aus einer und derselben Funktion $F(x)$ von (Ω) gemäß den Formeln

$$N_1(x) = \overline{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x), \dots \quad N_k(x) = \overline{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$$

ableiten lassen, mit $((\Psi))$ die Gesamtheit aller Systeme $\Psi_1(x), \dots \Psi_k(x)$ von je k Funktionen aus bzw. $(G_1), \dots (G_k)$, welche der Gleichung

$$0 = f_1(x)\ \Psi_1(x) + \dots + f_k(x)\ \Psi_k(x)$$

genügen.

Indem wir noch als Hilfsmittel zur Beweisführung vorübergehend Variable $\mu_1, \dots \mu_k$ einführen und unter (G^*) die Schar aller derjenigen Funktionen $\mu_1 G_1(x) + \dots + \mu_k G_k(x)$ der $n+k$ Variablen x und μ verstehen, in denen $G_j(x)$ zu (G_j) gehört, betrachten wir die Wirkungen $\mathsf{A}^*, \mathsf{B}^*$ der durch (41.) definierten A, B auf die Scharen $(F), (G^*)$. Da nun $\mathsf{A}(F) \leqq (G^*), \mathsf{B}(G^*) \leqq (F)$ ist, so kann man aus Satz 20. schließen, daß $\mathsf{A}^*, \mathsf{B}^*$ ein *reziprokes Paar* linearer Operationen für $(F), (G^*)$ in bezug auf die Hauptfaltungen bilden. Da aber $(F), (G^*)$ endlich sind, so sind auch $\mathsf{A}^*, \mathsf{B}^*$ endlich und bilden daher nach Satz 15. ein *ausgezeichnetes Paar* für $(F), (G^*)$, und man kann daher auf sie die Sätze 2., 3., 5., 9., 16. anwenden. Dabei bezeichnen wir wieder mit R den für (Ω) definierten Polarenprozeß (42.)

Es ist nun $\mathsf{B}(G^*) = (M)$; wenn sich nämlich eine Funktion $M(x)$ aus (F) in die Gestalt $M(x) = f_1(x)\ G_1(x) + \dots + f_k(x)\ G_k(x)$ setzen läßt, worin die $G_j(x)$ Funktionen aus (Ω) bedeuten, so läßt sie sich auch derart in diese Gestalt setzen, daß $G_j(x)$ zu (G_j) gehört. Aus dem entsprechenden Grunde ist $\mathsf{A}(F)$ die Gesamtheit derjenigen Funktionen $\mu_1 N_1(x) + \dots + \mu_k N_k(x)$, in welchen das System $N_1(x), \dots N_k(x)$ zu $((N))$ gehört. *Hiernach gelten folgende Sätze:*

Jede Funktion $M(x)$ aus (M) läßt sich auf eine und nur eine Weise in die Gestalt

$$(46.) \qquad M(x) = f_1(x)\ N_1(x) + \dots + f_k(x)\ N_k(x)$$

setzen, wobei $N_1(x), \dots N_k(x)$ ein System aus $((N))$ bedeutet.

Jedes System $N_1(x), \dots N_k(x)$ aus $((N))$ läßt sich auf eine und nur eine Weise in die Gestalt

$$(47.) \qquad N_1(x) = \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) M(x), \ldots N_k(x) = \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) M(x)$$

setzen, wobei $M(x)$ eine Funktion aus (M) bedeutet.

Die Gleichung

$$M(x) = \left(f_1(x)\ \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \cdots + f_k(x)\ \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) M'(x)$$

definiert eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Schar (M) auf sich selbst, wenn $M(x)$ und $M'(x)$ Funktionen aus (M) bezeichnen.

Das System von Gleichungen

$$N_1(x) = \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_1(x)\ N_1'(x) + \cdots + \bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_k(x)\, N_k'(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N_k(x) = \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_1(x)\ N_1'(x) + \cdots + \bar{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_k(x)\, N_k'(x)$$

definiert eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Gesamtheit $((N))$ auf sich selbst, wenn $N_1(x), \ldots N_k(x)$ und $N_1'(x), \ldots N_k'(x)$ Systeme aus $((N))$ bezeichnen.

Es gibt solche Konstanten $a_1, \ldots a_r$, daß für jede Funktion $M(x)$ aus (M) die Gleichung

$$(48.) \qquad M(x) = (a_1 \mathsf{R} + \cdots + a_r \mathsf{R}^r)\ M(x)$$

besteht.

Bezeichnet man mit $\Pi_{j\beta}$ den Polarenprozeß

$$\Pi_{j\beta} = \bar{f}_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(a_1 \mathsf{R}^0 + \cdots + a_r \mathsf{R}^{r-1})\, f_\beta(x),$$

so besteht für jedes System $N_1(x), \ldots N_k(x)$ aus $((N))$ das System von Gleichungen

$$(49.) \qquad \begin{cases} N_1(x) = \Pi_{11} N_1(x) + \cdots + \Pi_{1k} N_k(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_k(x) = \Pi_{k1} N_1(x) + \cdots + \Pi_{kk} N_k(x). \end{cases}$$

Die Funktionen $N_j(x)$ der Darstellung (46.) sind durch

$$N_j(x) = \bar{f}_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(a_1 \mathsf{R}^0 + \cdots + a_r \mathsf{R}^{r-1})\, M(x)$$

gegeben.

Die Funktion $M(x)$ der Darstellung (47.) ist durch

$$M(x) = (a_1 \mathsf{R}^0 + \cdots + a_r \mathsf{R}^{r-1})\,(f_1(x) N_1(x) + \cdots + f_k(x) N_k(x))$$

gegeben.

Jede Funktion $F(x)$ aus (F) läßt sich auf eine und nur eine Weise in die Summe

$$F(x) = M(x) + \Phi(x)$$

einer Funktion $M(x)$ aus (M) und einer Funktion $\Phi(x)$ aus (Φ) zerlegen. In dieser Zerlegung ist $M(x)$ durch

$$M(x) = (a_1 \mathsf{R} + \cdots + a_r \mathsf{R}^r) F(x)$$

gegeben. Damit daher eine vorgelegte Funktion $M(x)$ aus (F) zu (M) gehört, ist notwendig und hinreichend, daß sie der Gleichung (48.) genügt.

Jedes System $G_1(x), \ldots G_k(x)$ von k Funktionen aus bzw. $(G_1), \ldots (G_k)$ läßt sich auf eine und nur eine Weise in

$$G_1(x) = N_1(x) + \Psi_1(x), \ldots G_k(x) = N_k(x) + \Psi_k(x)$$

zerlegen, wobei das System $N_1(x), \ldots N_k(x)$ zu $((N))$, das System $\Psi_1(x), \ldots \Psi_k(x)$ zu $((\Psi))$ gehört. In dieser Zerlegung sind $N_1(x), \ldots N_k(x)$ durch

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \Pi_{11} G_1(x) + \cdots + \Pi_{1k} G_k(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_k(x) &= \Pi_{k1} G_1(x) + \cdots + \Pi_{kk} G_k(x) \end{aligned}$$

gegeben. Damit daher ein vorgelegtes System $N_1(x), \ldots N_k(x)$ von k Funktionen aus bzw. $(G_1), \ldots (G_k)$ zu $((N))$ gehört, ist notwendig und hinreichend, daß es dem System von Gleichungen (49.) genügt.

Aus Satz 16. erhalten wir zunächst die Sätze:

Wenn eine Funktion $\overline{M}(x)$ aus (F) die Eigenschaft hat, daß für jede den Gleichungen $\overline{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x) = 0, \ldots \overline{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x) = 0$ genügende Funktion $\Phi(x)$ aus (F) auch die Gleichung $\overline{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x) = 0$ besteht, so ist $\overline{M}(x) \equiv 0$ modd. $\overline{f}_1(x), \ldots \overline{f}_k(x)$. Wenn ein System $N_1(x), \ldots N_k(x)$ von k Funktionen aus bzw. $(G_1), \ldots (G_k)$ die Eigenschaft hat, daß für jedes der Gleichung $\overline{\Psi}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \cdots + \overline{\Psi}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \{0\}$ genügende System $\overline{\Psi}_1(x), \ldots \overline{\Psi}_k(x)$ von k Funktionen aus bzw. $(G_1), \ldots (G_k)$ auch die Gleichung $\overline{\Psi}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) N_1(x) + \cdots + \overline{\Psi}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) N_k(x) = 0$ besteht, so gibt es mindestens eine Funktion $F(x)$ aus (Ω), sodaß $N_1(x) = \overline{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x), \ldots N_k(x) = \overline{f}_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$ ist.

Die beiden anderen noch aus Satz 16. zu entnehmenden Sätze sind wieder (wie in I.) auch unabhängig davon leicht einzusehen.

III. Wir wollen einen in I. für isobare Funktionen bewiesenen Satz auf beliebige Funktionen ausdehnen. Es sei eine *von 0 verschiedene* Funktion $f(x)$ gegeben. Dann wollen wir zeigen, daß sich jede Funktion $G(x)$ auf mindestens eine Weise in die Gestalt $G(x) = \bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$ setzen läßt.

Als Hilfsmittel führen wir für $x_1, \ldots x_n$ Gewichte $h_1 > 0, \ldots h_n > 0$ ein. Ist $Q(x)$ eine nicht isobare Funktion, so kann man sie auf eine und nur eine Weise in eine Summe von 0 verschiedener isobarer Funktionen verschiedener Gewichte zerlegen; von diesen Funktionen bezeichnen wir diejenigen, welche das kleinste und größte Gewicht haben, mit $Q_{\min}(x)$ und $Q_{\max}(x)$. Ist $Q(x)$ isobar, so verstehen wir unter $Q_{\min}(x)$ und $Q_{\max}(x)$ die Funktion $Q(x)$ selbst. Wir wollen nun den angekündigten Satz in folgender Verschärfung beweisen: *die Gleichung*

$$G(x) = \bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_{\min}(x)\, G'(x) \tag{50.}$$

definiert eine umkehrbar eindeutige Abbildung von (Ω) *auf sich selbst.*

Ist nämlich erstens die Gleichung (50.) erfüllt, so muß

$$G_{\max}(x) = \bar{f}_{\min}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_{\min}(x)\, G'_{\max}(x)$$

sein, weil im Falle $G'(x) \neq 0$ die rechts stehende Funktion nach (40.) von 0 verschieden ist. Im Falle $G'(x) \neq 0$ ist daher auch $G(x) \neq 0$. Damit ist bewiesen, daß die Gleichung (50.) für $G(x) = 0$ nur die Lösung $G'(x) = 0$ und daher für beliebig vorgelegte $G(x)$ höchstens eine Lösung $G'(x)$ besitzt.

Ist zweitens $G(x)$ vorgelegt, so gibt es nach I. eine und nur eine isobare Funktion $H(x)$, sodaß

$$G_{\max}(x) = \bar{f}_{\min}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_{\min}(x)\, H(x)$$

ist. Die Funktion $G_1(x) = G(x) - \bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_{\min}(x)\, H(x)$ ist dann entweder $= 0$ oder es ist $G_{1\max}(x)$ von geringerem Gewicht als $G_{\max}(x)$. Setzt man daher für eine solche Funktion die Möglichkeit der Darstellung $G_1(x) = \bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_{\min}(x)\, G'_1(x)$ bereits voraus, so genügt die Funktion $G'(x) = H(x) + G'_1(x)$ der Gleichung (50.).

§ 7. Polarenprozesse.

I. Für die Schar (F) seien $h \geqq 1$ lineare Operationen $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_h$ gegeben, die sämtlich der Bedingung $\mathsf{A}_\alpha (F) \leqq (F)$ genügen. Eine lineare Operation für (F) heißt *aus ihnen unter Zugrundelegung der Reihenfolge* $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_h$ *ableitbar*, wenn sie sich auf mindestens eine Weise in die Gestalt

$$\sum_{\nu_1, \ldots \nu_h} a_{\nu_1 \ldots \nu_h} \mathsf{A}_h^{\nu_h} \ldots \mathsf{A}_1^{\nu_1} \tag{51.}$$

setzen läßt, in der die a Konstanten bedeuten und die Summe Σ über endlich viele Systeme ganzzahliger nichtnegativer $\nu_1, \ldots \nu_h$ erstreckt wird.

Der Sinn des Ausdrucks

$$f(\mathsf{A}_\alpha, \ldots \mathsf{A}_\beta),$$

worin f eine ganze rationale Funktion von beliebig vielen Argumenten und $\alpha, \ldots \beta$ ebensoviele Zahlen, von denen jede der Reihe $1, \ldots h$ angehört, bedeuten, ist nicht ohne besondere Festsetzung klar. Wir definieren nun den *Sinn dieses Ausdrucks unter Zugrundelegung der Reihenfolge* $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_h$. Zu dem Zwecke ordnen wir jeder der Operationen A_α eine Variable t_α zu, setzen

$$f(t_\alpha, \ldots t_\beta) = \sum_{\nu_1, \ldots \nu_h} a_{\nu_1 \ldots \nu_h} t_h^{\nu_h} \ldots t_1^{\nu_1}$$

und definieren nun

$$f(\mathsf{A}_\alpha, \ldots \mathsf{A}_\beta) = \sum_{\nu_1, \ldots \nu_h} a_{\nu_1 \ldots \nu_h} \mathsf{A}_h^{\nu_h} \ldots \mathsf{A}_1^{\nu_1}.$$

Dann ist also $f(\mathsf{A}_\alpha, \ldots \mathsf{A}_\beta)$ eine aus den Operationen $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_h$ unter Zugrundelegung der Reihenfolge $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_h$ ableitbare lineare Operation für (F). Ist z. B. $f(y, z) = y z^2$, so ist $f(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_1) = \mathsf{A}_1^3$, $f(\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_1) = \mathsf{A}_2 \mathsf{A}_1^2$, $f(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2) = \mathsf{A}_2^2 \mathsf{A}_1$, $f(\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_2) = \mathsf{A}_2^3$. Jede aus $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_h$ unter Zugrundelegung der Reihenfolge $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_h$ ableitbare lineare Operation für (F) läßt sich auf mindestens eine Weise in die Gestalt $f(\mathsf{A}_h, \ldots \mathsf{A}_1)$ setzen; wird sie nämlich durch (51.) dargestellt, so braucht man nur $\Sigma a_{\nu_1 \ldots \nu_h} t_h^{\nu_h} \ldots t_1^{\nu_1}$ mit $f(t_h, \ldots t_1)$ zu bezeichnen.

Der Begriff der Polarenprozesse wurde in § 4 I. erklärt; es sind das die aus den Operationen $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}; x_1, \ldots x_n$ ableitbaren linearen Operationen für (Ω). Da zwischen den beiden Operationen $\frac{\partial}{\partial x_i}$ und x_i die Gleichung $\frac{\partial}{\partial x_i} x_i - x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \{1\}$ besteht, im übrigen aber zwischen den $2n$ Operationen Vertauschbarkeit herrscht, so ist jeder Polarenprozeß aus ihnen

unter Zugrundelegung der Reihenfolge

$$(52.) \qquad \frac{\partial}{\partial x_n} \cdot \cdots \frac{\partial}{\partial x_1}\,;\; x_n, \ldots x_1$$

ableitbar. *Wir wollen den Sinn des Ausdrucks* $f(\mathsf{v}, \ldots \mathsf{w})$, worin f eine ganze rationale Funktion von beliebig vielen Argumenten und $\mathsf{v}, \ldots \mathsf{w}$ ebensoviele Operationen, von denen jede der Reihe (52.) angehört, bedeuten, *stets unter Zugrundelegung der Reihenfolge* (52.) *verstehen.* Jeder Polarenprozeß ist in der Gestalt $f\left(x_1, \ldots x_n; \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ darstellbar, wofür wir kurz $f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ schreiben. Übrigens ist an der Festsetzung der Reihenfolge (52.) nur wesentlich, daß immer $\frac{\partial}{\partial x_i}$ vor x_i kommt, da im übrigen Vertauschbarkeit herrscht.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Darstellung $f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ der Polarenprozesse *eindeutig* ist, d. h. daß aus $f_1\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) = f_2\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ die Gleichung $f_1(y; z) = f_2(y; z)$ in $2n$ Variablen $y_1, \ldots y_n;\ z_1, \ldots z_n$ folgt, m. a. W. daß aus $f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) = \{0\}$ die Gleichung $f(y; z) = 0$ in $2n$ Variablen folgt. Wir wollen also folgenden Satz beweisen:

Satz 21. Ist $f(y; z) \neq 0$, so gibt es eine Funktion $F(x)$ aus (Ω), sodaß $f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) \neq 0$ ist.

Zum Beweise entwickeln wir $f(y; z)$ nach Potenzprodukten der z und suchen unter denjenigen Potenzprodukten der z, welche mit von 0 verschiedenen (i. a. noch die y enthaltenden) Koeffizienten auftreten, das tiefste*). Wird dieses $F(z)$ genannt, so ist $f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) \neq 0$.

Diesen Satz müssen wir für spätere Anwendung noch so verschärfen:

Satz 22. Ist $f_1(y; z) \neq 0, \ldots f_k(y; z) \neq 0$, so gibt es ein Potenzprodukt $x_1^{\pi_1} \ldots x_n^{\pi_n}$, sodaß $f_1\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) x_1^{\pi_1} \ldots x_n^{\pi_n} \neq 0, \ldots f_k\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) x_1^{\pi_1} \ldots x_n^{\pi_n} \neq 0$ ist.

Um diesen Satz zu beweisen, gehen wir von einer Funktion $f(y; z) \neq 0$

---

*) $z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$ heißt höher als $z_1^{\beta_1} \ldots z_n^{\beta_n}$ (in bezug auf die Reihenfolge $z_1, \ldots z_n$), wenn von den Differenzen $\alpha_1 - \beta_1, \ldots \alpha_n - \beta_n$ die erste von 0 verschiedene > 0 ist.

aus und bezeichnen die höchste in $f(y; z)$ auftretende Potenz von z_i mit $z_i^{a_i}$. Es gibt dann eine ganze rationale Funktion $G(y; z)$ von der Beschaffenheit, daß für jedes Potenzprodukt $x_1^{\pi_1} \dots x_n^{\pi_n}$, dessen Exponenten den Bedingungen $\pi_1 \geqq a_1, \dots \pi_n \geqq a_n$ genügen, die Gleichung

$$f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) x_1^{\pi_1} \dots x_n^{\pi_n} = x_1^{\pi_1 - a_1} \dots x_n^{\pi_n - a_n} G(x; \pi)$$

besteht. Ist nun bei Entwicklung von $f(y; z)$ nach den z das höchste Glied $\varphi(y) z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n}$, so hat $G(y; z)$ bei Entwicklung nach den z das von 0 verschiedene Glied $\varphi(y)\, y_1^{a_1 - a_1} \dots y_n^{a_n - a_n} z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n}$ als höchstes Glied. Es ist also $G(y; z) \neq 0$. Wenden wir dies auf jede der Funktionen $f_1, \dots f_k$ an, so erhalten wir Funktionen $G_1, \dots G_k$, die alle $\neq 0$ sind, und man braucht, um die Behauptung des Satzes einzusehen, nur die π hinreichend groß und so zu wählen, daß das Produkt $G_1(x; \pi) \dots G_k(x; \pi) \neq 0$ ist. Damit ist der Beweis des Satzes 22. und zugleich ein neuer Beweis für Satz 21. erbracht*).

Nach der durch Satz 21. bewiesenen Eindeutigkeit der Darstellung $f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ können wir jedem Polarenprozeß Π einen bestimmten Polarenprozeß Π' zuordnen durch die Festsetzung, daß, wenn $\Pi = f\left(x_1, \dots x_n; \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ ist, $\Pi' = f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}; x_1, \dots x_n\right)$ sein soll. Dabei ist also dieses Zeichen, für das wir auch kurz $f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right)$ schreiben, auf Grund der Reihenfolge (52.) zu verstehen. Wir nennen Π und Π' *transponierte Polarenprozesse***). Setzt man auf irgendeine Weise

$$f(y; z) = P_1(y)\, Q_1(z) + \dots + P_k(y)\, Q_k(z),$$

so ist für jede Funktion $F(x)$ aus (Ω)

$$f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = P_1(x)\, Q_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) + \dots + P_k(x)\, Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x),$$

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right) F(x) = Q_1(x)\, P_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) + \dots + Q_k(x)\, P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x).$$

---

*) Die Methode reicht auch aus, um den Satz zu beweisen, daß ein Produkt mehrerer von $\{0\}$ verschiedener Polarenprozesse stets wieder von $\{0\}$ verschieden ist.

**) *Ohne Beweis sei der Satz erwähnt, daß für Polarenprozesse* Π_1 *und* Π_2 *stets*

$$(\Pi_2\, \Pi_1)' = \Pi_1'\, \Pi_2'$$

gilt.

Die Erklärung der Zeichen $f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right)$ hätte man auch in der folgenden kurzen Fassung geben können. Der Sinn eines Zeichens $f\left(x_1, \ldots x_\nu; \frac{\partial}{\partial x_{\nu+1}}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, in welchem nur vertauschbare Operationen vorkommen, ist schon nach § 4 II. ohne Festsetzung einer Reihenfolge (52.) klar. Wendet man diese Bemerkung auf das Gebiet von $2n$ Variablen $x_1, \ldots x_n; \xi_1, \ldots \xi_n$ an, so kann man also ohne weitere Erklärung

$$(53.) \quad K(\xi; x) = f\left(\xi; \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x), \qquad M(\xi; x) = f\left(\frac{\partial}{\partial \xi}; x\right) F(\xi)$$

bilden. Und nun hätte man definieren können:

$$f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) = K(x; x), \qquad f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right) F(x) = M(x; x).$$

Schließlich heben wir das folgende Beispiel eines Polarenprozesses, in welchem nur vertauschbare Operationen vorkommen, im Gebiete der $2n$ Variablen x und ξ hervor. Es seien endlich viele verschiedene Potenzprodukte $x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ gegeben, und man setze

$$(54.) \qquad \omega(\xi; x) = \sum_a \frac{\xi_1^{a_1} \ldots \xi_n^{a_n} x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!},$$

worin die Summe $\sum_a$ so zu erstrecken ist, daß $x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ die gegebenen Potenzprodukte durchläuft. Dann bilden wir den Polarenprozeß $\omega\left(\xi; \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Er hat folgende Eigenschaft. Ist $F(x)$ eine Funktion der x allein, in welcher keine anderen Potenzprodukte auftreten als die gegebenen zur Konstruktion von $\omega(\xi; x)$ benutzten, so ist, wie aus (34.) erhellt,

$$(55.) \qquad F(\xi) = \left[\omega\left(\xi; \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)\right]_{x=0}.$$

Diese Gleichung gilt aber auch in der Verallgemeinerung

$$L(\xi; \xi) = \left[\omega\left(\xi; \frac{\partial}{\partial x}\right) L(\xi; x)\right]_{x=0},$$

wenn in $L(\xi; x)$ keine anderen Potenzprodukte der x vorkommen als die zur Konstruktion von $\omega(\xi; x)$ benutzten. Diese Bemerkung wenden wir auf die Funktionen (53.) an; danach kann man also zu den gegebenen Funktionen $F(x)$ und $f(\xi; x)$ die Funktion (54.) so konstruieren, daß unter Verwendung der Bezeichnungen (53.) die Gleichungen

$$f\left(\xi; \frac{\partial}{\partial \xi}\right) F(\xi) = \left[\omega\left(\xi; \frac{\partial}{\partial x}\right) K(\xi; x)\right]_{x=0},$$

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right) F(x) = \left[\omega\left(\frac{\partial}{\partial \xi}; x\right) M(\xi; x)\right]_{\xi=0}$$

bestehen, denen man durch Einführung der Funktion

(56.) $$A(\xi; x) = \omega(\xi; x)\, f(\xi; x)$$

die Gestalt

(57.) $$\begin{cases} f\left(\xi; \frac{\partial}{\partial \xi}\right) F(\xi) = \left[A\left(\xi; \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)\right]_{x=0}, \\ f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right) F(x) = \left[A\left(\frac{\partial}{\partial \xi}; x\right) F(\xi)\right]_{\xi=0} \end{cases}$$

geben kann.

Sind die bei der Konstruktion von (54.) benutzten Potenzprodukte speziell die sämtlichen Potenzprodukte vom Grade $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = s$, so ist $s!\, \omega(\xi; x) = (\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n)^s$, und es kann $s!\, \omega\left(\xi; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ als die s^{te} Potenz des Prozesses $\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ aufgefaßt werden, welcher das bekannteste Beispiel eines Polarenprozesses bildet.

II. Satz 23. Für transponierte Polarenprozesse $f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right)$ und beliebige Funktionen $F(x)$, $G(x)$ gilt stets die Gleichung*):

(58.) $$\left[G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)\right]_0 = \left[F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right) G(x)\right]_0.$$

Um den Satz zu beweisen, betrachten wir erst einen speziellen Fall,

---

*) *Setzt man den in der vorigen Fußnote erwähnten Satz als bekannt voraus, so ergibt sich Satz 23. folgendermaßen.* Man bilde die Polarenprozesse

$$\Pi_1 = F(x),\ \Pi_2 = f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right),\ \Pi_3 = G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right);$$

dann sind die transponierten

$$\Pi_1' = F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),\ \Pi_2' = f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right),\ \Pi_3' = G(x).$$

Nach dem erwähnten Satze sind also

$$\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1 \text{ und } \Pi_1' \Pi_2' \Pi_3'$$

transponierte Polarenprozesse. Ihre Anwendung auf die Funktion 1 ergibt daher

$$\left[G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)\, 1\right]_0 = \left[F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right) G(x)\, 1\right]_0.$$

Diese Gleichung, in der $F(x)$ links und $G(x)$ rechts Prozesse bedeuten, ist aber gleichbedeutend mit der Gleichung (58.), in der $F(x)$ links und $G(x)$ rechts Funktionen bedeuten.

wobei wir aber die Variablen nicht $x_1, \dots x_n$, sondern $x_1, \dots x_n; \xi_1, \dots \xi_\nu$ nennen. Wir behaupten nämlich für jede Funktion $A(\xi; x)$ dieser Variablen und beliebige Funktionen $F(x)$ der x allein, $G(\xi)$ der ξ allein die Gleichung

$$(59.) \qquad \left[G\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right) A\left(\xi; \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)\right]_0 = \left[F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) A\left(\frac{\partial}{\partial \xi}; x\right) G(\xi)\right]_0,$$

worin die angehängten 0 bedeuten, daß alle $n + \nu$ Variablen $= 0$ zu setzen sind. Diese Gleichung leuchtet unmittelbar ein, wenn man auf irgendeine Weise

$$A(\xi; x) = P_1(\xi)\, Q_1(x) + \cdots + P_k(\xi)\, Q_k(x)$$

setzt, weil nach (35.)

$$\left[G\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right) P_a(\xi)\right]_0 = \left[P_a\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right) G(\xi)\right]_0, \qquad \left[F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) Q_a(x)\right]_0 = \left[Q_a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)\right]_0$$

ist.

Auf diesen speziellen Fall können wir nun den allgemeinen, in welchem wir aber die Variablen wieder $x_1, \dots x_n$ nennen, durch Einführung von Hilfsvariablen $\xi_1, \dots \xi_n$ zurückführen. Wir können nämlich zu den gegebenen Funktionen $F(x)$, $G(x)$, $f(\xi; x)$ die Funktion (54.) so konstruieren, daß unter Einführung der Bezeichnung (56.) die zu (57.) analogen Gleichungen

$$(60.) \qquad \begin{cases} f\left(\xi; \frac{\partial}{\partial \xi}\right) F(\xi) = \left[A\left(\xi; \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)\right]_{x=0}, \\ f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right) G(x) = \left[A\left(\frac{\partial}{\partial \xi}; x\right) G(\xi)\right]_{\xi=0} \end{cases}$$

bestehen. Dadurch ist aber (58.) auf (59.) zurückgeführt*).

Satz 24. Die Polarenprozesse $\mathsf{A} = \bar{f}\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ und $\mathsf{B} = f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right)$ bilden ein *reziprokes Paar* linearer Operationen für (Ω), (Ω) in bezug auf die Hauptfaltungen.

---

*) Entwickelt man übrigens $F(x)$, $G(x)$, $f(\xi; x)$ nach Potenzprodukten der Variablen, so leuchtet ein, daß es genügt, die Gleichung (58.) für den Fall zu beweisen, daß F, G, f bloße Potenzprodukte sind. Für solche zerfällt aber die Behauptung in n auf die einzelnen Variablen bezügliche Behauptungen. Es genügt also schließlich, für eine Variable x die Gleichung

$$\left[\frac{d^\delta}{dx^\delta} x^\gamma \frac{d^\beta}{dx^\beta} x^\alpha\right]_0 = \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} x^\delta\right]_0$$

zu beweisen. Diese kann man unter Einführung der nötigen Fallunterscheidungen auch durch direkte Rechnung verifizieren.

Setzt man nämlich $N(x) = \bar{f}\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)$, $M(x) = f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right) G(x)$, so ist nach (58.) $\left[G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{N}(x)\right]_0 = \left[\bar{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) M(x)\right]_0$, also $\bar{N}(\cdot)\, G(\cdot) = \bar{F}(\cdot)\, M(\cdot)$.

Wir nennen $\bar{f}\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right), f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right)$ *reziproke Polarenprozesse.*

III. Die in § 3 V. konstruierten, durch (26.), (27.) definierten, linearen Operationen A, B im Gebiete von $n + h + k$ Variablen x, μ und λ können durch

$$\mathsf{A} = \sum_{i,j} \mathsf{A}_{ij} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \mu_j, \qquad \mathsf{B} = \sum_{i,j} \mathsf{B}_{ij} \lambda_i \frac{\partial}{\partial \mu_j}$$

dargestellt werden. Nimmt man daher für jede der Scharen $(F^{(\vartheta)}), (G^{(\vartheta)})$ die Schar (Ω) und als Faltung derselben die Hauptfaltung, sodaß auch die Faltungen der Scharen $(F), (G)$ die Hauptfaltungen im Gebiete der $n + h + k$ Variablen werden, für A_{ij}, B_{ij} aber reziproke Polarenprozesse $\bar{f}_{ij}\left(x; \frac{\partial}{\partial x}\right), f_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right)$, so sind A, B die Wirkungen der aus der Funktion

$$f(\xi; \mu; x; \lambda) = \sum_{i,j} f_{ij}(\xi; x)\, \lambda_i \mu_j \tag{61.}$$

entspringenden reziproken Polarenprozesse

$$\bar{f}\left(x; \mu; \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial \lambda}\right), \qquad f\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial \mu}; x; \lambda\right) \tag{62.}$$

im Gebiete der $n + h + k$ Variablen auf die Scharen $(F), (G)$.

Ebenso sind die durch (41.) definierten Operationen A, B die Wirkungen der aus der Funktion

$$f(\mu; x) = \mu_1 f_1(x) + \cdots + \mu_k f_k(x) \tag{63.}$$

entspringenden reziproken Polarenprozesse

$$\bar{f}\left(\mu; \frac{\partial}{\partial x}\right), \qquad f\left(\frac{\partial}{\partial \mu}; x\right) \tag{64.}$$

auf die Scharen (Ω), (G). Daher folgt Satz 20. auch aus Satz 24. vermöge der in § 3 IV. angegebenen Übertragung auf Teilscharen.

§ 8. Isobare Polarenprozesse.

Den Variablen $x_1, \ldots x_n$ seien die Gewichte $h_1 > 0, \ldots h_n > 0$ erteilt.

I. Ein *Polarenprozeß* heißt *isobar*, wenn seine Anwendung auf isobare Funktionen stets wieder isobare Funktionen gibt. So ist der Prozeß $|0|$ isobar.

Ist Π ein von $\{0\}$ verschiedener isobarer Polarenprozeß, so gibt es eine bestimmte reelle Zahl l derart, daß, wenn s das Gewicht einer isobaren Funktion $F(x)$ bezeichnet, stets $s+l$ das Gewicht der Funktion $\Pi F(x)$ ist. l heißt das Gewicht des Prozesses Π. Dem Prozeß $\{0\}$ werden alle möglichen Konstanten als Gewichte zugeordnet.

Der Prozeß $f\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right)$ ist dann und nur dann isobar, wenn die Funktion $f(y;z)$ isobar ist, wofern man den y_i die Gewichte h_i, den z_i die Gewichte $-h_i$ erteilt. Der Prozeß $f\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right)$ und die Funktion $f(y;z)$ haben dann dasselbe Gewicht.

Um die hier über isobare Polarenprozesse aufgestellten Behauptungen zu beweisen, kommt es nur darauf an, zu jeder nicht isobaren Funktion $f(y;z)$ eine solche isobare Funktion $F(x)$ zu konstruieren, daß $f\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x)$ nicht isobar ist. Hierzu genügt es, wenn $f(y;z)=f_1(y;z)+\cdots+f_k(y;z)$ gesetzt wird, worin $f_1(y;z),\ldots f_k(y;z)$ von 0 verschiedene isobare Funktionen verschiedener Gewichte bedeuten, $F(x)$ als Potenzprodukt nach Satz 22. zu wählen.

Ist von zwei transponierten Polarenprozessen $f\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right), f\left(\frac{\partial}{\partial x};x\right)$ oder von zwei reziproken Polarenprozessen $\bar{f}\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right), f\left(\frac{\partial}{\partial x};x\right)$ der eine isobar und vom Gewicht l, so ist auch der andere isobar und vom Gewicht $-l$.

Der Polarenprozeß $\omega\left(\xi;\frac{\partial}{\partial x}\right)$ im Gebiete von $2n$ Variablen, welcher aus der Funktion (54.) entspringt, ist, wenn man ξ_i und x_i dasselbe Gewicht $h_i>0$ erteilt, isobar vom Gewichte 0.

II. Die reziproken Polarenprozesse $\mathsf{A}=\bar{f}\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $\mathsf{B}=f\left(\frac{\partial}{\partial x};x\right)$ seien isobar von den Gewichten $-l, l$. Es sei (F) die Schar aller isobaren Funktionen vom Gewicht s, (G) die Schar aller isobaren Funktionen vom Gewicht $s-l$. Dann ist $\mathsf{A}(F)\leqq(G)$, $\mathsf{B}(G)\leqq(F)$*). Aus Satz 24. folgt

*) Der Gleichung (58.) kann in diesem Falle die Gestalt

$$G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x)=F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\left(\frac{\partial}{\partial x};x\right)G(x)$$

gegeben werden, da hierin beide Seiten isobar vom Gewicht 0 sind.

daher nach § 3 IV. und mit Rücksicht auf die Endlichkeit der Scharen (F), (G) der Satz:

Satz 25. Die Wirkungen A^*, B^* der isobaren Polarenprozesse $\bar{f}\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right), f\left(\frac{\partial}{\partial x};x\right)$ von den Gewichten $-l$, l auf die Scharen (F), (G) aller isobaren Funktionen von den Gewichten s, $s-l$ bilden ein *reziprokes Paar endlicher* linearer Operationen für (F), (G) in bezug auf die Hauptfaltungen.

Nach Satz 15. bilden sie daher ein ausgezeichnetes Paar, und man kann auf sie die Sätze 2., 3., 5., 9., 16. anwenden. Auch kann man Satz 25. durch abermalige Anwendung von § 3 IV. auf geeignete Teilscharen von (F), (G) übertragen.

III. Es seien $h\,k$ Paare $\bar{f}_{ij}\left(x;\frac{\partial}{\partial x}\right), f_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x};x\right)$ reziproker Polarenprozesse gegeben $(i=1,\dots h;\ j=1,\dots k)$. Dieselben seien isobar und von solchen Gewichten, daß sich die Gewichte l_{ij} der $f_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x};x\right)$ durch Vermittlung von $h+k$ reellen Zahlen s_i, t_j in die Gestalt

$$l_{ij}=s_i-t_j$$

bringen lassen.

Die s_i, t_j sind durch die gegebenen l_{ij} nicht völlig bestimmt, sondern man kann eine von ihnen willkürlich wählen. Nachdem dies geschehen, die s_i, t_j also festliegen, verstehe man unter $(F^{(i)}), (G^{(j)})$ die Scharen aller isobaren Funktionen von den Gewichten s_i, t_j und unter den Faltungen dieser Scharen die Hauptfaltungen. Bezeichnet man dann die Wirkungen der gegebenen Polarenprozesse auf diese Scharen mit A_{ij}, B_{ij}, so kann man § 3 V. anwenden. Dabei werden (F), (G) endliche Scharen in $n+h+k$ Variablen und A, B die Wirkungen der aus (61.) entspringenden Polarenprozesse (62.) auf (F), (G).

Man wähle nun zwei reelle Zahlen s, t so, daß alle Differenzen $s-s_i$ und $t-t_j>0$ sind und erteile den Variablen λ_i, μ_j die Gewichte $s-s_i$, $t-t_j$. Dann sind (F), (G) isobare Scharen von den Gewichten s, t und die Polarenprozesse (62.) isobar von den Gewichten $t-s$, $s-t$.

Ebenso wird, wenn $f_1(x),\dots f_k(x)$ isobare Funktionen von den Gewichten $l_1\geqq 0,\dots l_k\geqq 0$ sind und (F) die Schar aller isobaren Funktionen vom Gewicht s bedeutet, und wenn man den Variablen $\mu_1,\dots \mu_k$ die Gewichte $l_1+1>0,\dots l_k+1>0$ erteilt, die in § 6 II. mit (G^*) bezeichnete Schar

in $n+k$ Variablen isobar vom Gewicht $s+1$, und es werden die mit A^*, B^* bezeichneten Operationen für (F), (G^*) die Wirkungen der aus (63.) entspringenden isobaren Polarenprozesse (64.) von den Gewichten $1, -1$. *Daher ordnet sich der in § 6 II. behandelte Fall dem Satze 25. in der durch § 3 IV. angedeuteten Übertragung auf Teilscharen unter.*

Kapitel III. Kern, Eigenfunktionen und Eigenwerte.

§ 9. Funktionen von zwei Variablenreihen*).

Ist $A(\xi; x)$ eine ganze rationale Funktion der $n+\nu$ Variablen

$$x_1, \ldots x_n,$$
$$\xi_1, \ldots \xi_\nu,$$

so kann man sie auf mannigfache Weise in die Gestalt

$$A(\xi; x) = Q_1(\xi)\, P_1(x) + \cdots + Q_\varrho(\xi)\, P_\varrho(x) \tag{65.}$$

bringen, worin die $P_\alpha(x)$ ganze rationale Funktionen der x allein, die $Q_\alpha(\xi)$ ganze rationale Funktionen der ξ allein bedeuten.

Ist $A(\xi; x) \not\equiv 0$, so nennen wir die *kleinste* Zahl ϱ, mit der eine Darstellung (65.) möglich ist, den *Rang der Funktion* $A(\xi; x)$ in bezug auf die gegebene Verteilung der $n+\nu$ Variablen in zwei Reihen. Eine Darstellung (65.), in welcher ϱ diesen kleinstmöglichen Wert hat, heißt *eine kürzeste* Darstellung. In einer kürzesten Darstellung sind sowohl $P_1(x), \ldots P_\varrho(x)$ linearunabhängig als auch $Q_1(\xi), \ldots Q_\varrho(\xi)$ linearunabhängig. Der Funktion $A(\xi; x) = 0$ erteilen wir den Rang 0.

Der Begriff des Ranges der Funktion $A(\xi; x)$ hängt nun eng zusammen mit dem Begriff ihrer x-Schar und dem ihrer ξ-Schar.

Unter der *x-Schar der Funktion* $A(\xi; x)$ verstehen wir die kleinste Schar, welche alle diejenigen Funktionen der x allein umfaßt, die aus $A(\xi; x)$ durch Spezialisierung der ξ entstehen. Die x-Schar ist endlich; liegt nämlich eine Darstellung (65.) vor, so ist die x-Schar $\leqq$ der kleinsten die ϱ Funktionen $P_1(x), \ldots P_\varrho(x)$ umfassenden Schar. Zur Bestimmung der x-Schar einer vorgelegten Funktion $A(\xi; x)$ dient der folgende Satz:

---

*) Die in diesem § zusammengestellten Bemerkungen, die sich mir übrigens bereits vor längerer Zeit bei dem Studium der *Hilbert*schen Arbeiten über Integralgleichungen ergeben hatten, hat auch Herr *Weitzenböck* gemacht (Rend. Circ. mat. Palermo).

Sind in einer Darstellung (65.) *die* ϱ *Funktionen* $Q_1(\xi), \ldots Q_\varrho(\xi)$ *linearunabhängig, so ist die kleinste die* ϱ *Funktionen* $P_1(x), \ldots P_\varrho(x)$ *umfassende Schar identisch mit der* x*-Schar der Funktion* $A(\xi; x)$. Denn man kann*) für die (ξ) ϱ Spezialisierungen $(\xi^{(\alpha)})$ derart wählen, daß die Determinante $|Q_\beta(\xi^{(\alpha)})| \neq 0$ ist, und daher $P_1(x), \ldots P_\varrho(x)$ durch $A(\xi^{(1)}; x), \ldots A(\xi^{(\varrho)}; x)$ linear ausdrücken.

Analog definiert man die ξ*-Schar der Funktion* $A(\xi; x)$ und macht die entsprechende Betrachtung.

Gesetzt nun, in einer vorgelegten Darstellung (65.) wären sowohl $P_1(x), \ldots P_\varrho(x)$ linearunabhängig als auch $Q_1(\xi), \ldots Q_\varrho(\xi)$ linearunabhängig, oder, wie wir für einen Augenblick sagen wollen, die Darstellung (65.) wäre „doppeltlinearunabhängig". Dann müßte sowohl die kleinste $P_1(x), \ldots P_\varrho(x)$ umfassende Schar mit der x-Schar als auch die kleinste $Q_1(\xi), \ldots Q_\varrho(\xi)$ umfassende Schar mit der ξ-Schar der Funktion $A(\xi; x)$ identisch sein; daher müßten die x-Schar und die ξ-Schar von $A(\xi; x)$ beide den Rang ϱ haben.

Ist nun eine von 0 verschiedene Funktion $A(\xi; x)$ vorgelegt, so sind ihre kürzesten Darstellungen, wie schon bemerkt, doppeltlinearunabhängig. Folglich gibt es tatsächlich doppeltlinearunabhängige Darstellungen, und es ergibt sich daher zunächst der Satz, daß die x-Schar und die ξ-Schar von $A(\xi; x)$ gleichen Rang haben. Zugleich ergibt sich, daß dieser gemeinsame Rang der x-Schar und der ξ-Schar identisch ist mit dem Range der Funktion $A(\xi; x)$, womit eine von den Darstellungen (65.) unabhängige Definition des Ranges der Funktion $A(\xi; x)$ gewonnen ist. Endlich ergibt sich, daß auch umgekehrt jede doppeltlinearunabhängige Darstellung eine kürzeste ist.

Ist $A(\xi; x) = 0$, so haben sowohl die x-Schar als die ξ-Schar von $A(\xi; x)$ den Rang 0, und der Rang der Funktion $A(\xi; x)$ ist nach Definition auch 0.

Offenbar kann man den Rang von $A(\xi; x)$ auch definieren als den kleinsten Wert ϱ, für welchen die mit $(\varrho + 1)\nu$ Variablen $\xi_i^{(\alpha)}$ und $(\varrho + 1)n$

---

*) Ist allgemein $Q_1(\xi), \ldots Q_\varrho(\xi)$ ein beliebiges System von ϱ Funktionen, so ist sein Rang (d. i. der Rang der kleinsten diese Funktionen umfassenden Schar) offenbar identisch mit dem Range der mit $\varrho\nu$ Variablen $\xi_i^{(\alpha)}$ gebildeten Matrix

$$Q_\beta(\xi^{(\alpha)}) \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots \varrho).$$

Variablen $x_j^{(\beta)}$ gebildete $\varrho+1$-reihige Determinante $|A(\xi^{(\alpha)}; x^{(\beta)})|$ verschwindet.

Hat $A(\xi; x)$ den Rang $\varrho > 0$ und sind $P_1(x), \ldots P_\varrho(x)$ ϱ linearunabhängige Funktionen aus der x-Schar der Funktion $A(\xi; x)$, so gibt es eine und nur eine Darstellung (65.), in welcher gerade diese Funktionen $P_1(x), \ldots P_\varrho(x)$ auftreten.

Es sei (F) eine Schar von Funktionen der x allein. Dann nennen wir $A(\xi; x)$ eine *zweireihige Funktion über* (F), wenn es eine Darstellung (65.) gibt, in der $P_1(x), \ldots P_\varrho(x)$ der Schar (F) angehören. Dazu ist notwendig, daß für die Funktion $A(\xi; x)$ die x-Schar $\leqq (F)$ ist. Dies ist aber auch hinreichend, da, wenn $A(\xi; x) \not\equiv 0$ ist, in jeder kürzesten Darstellung die Funktionen $P_1(x), \ldots P_\varrho(x)$ der x-Schar von $A(\xi; x)$ angehören. Ist ebenso (H) eine Schar von Funktionen der ξ allein, so heißt $A(\xi; x)$ eine zweireihige Funktion über (H), wenn es eine Darstellung (65.) gibt, in der $Q_1(\xi), \ldots Q_\varrho(\xi)$ der Schar (H) angehören, und dafür ist notwendig und hinreichend, daß für die Funktion $A(\xi; x)$ die ξ-Schar $\leqq (H)$ ist.

Ist $A(\xi; x)$ sowohl zweireihige Funktion über (F) als auch zweireihige Funktion über (H), so gibt es eine Darstellung (65.), in der gleichzeitig $P_1(x), \ldots P_\varrho(x)$ zu (F) und $Q_1(\xi), \ldots Q_\varrho(\xi)$ zu (H) gehören; denn jede kürzeste Darstellung hat diese Eigenschaft. Wir nennen $A(\xi; x)$ kurz eine zweireihige Funktion über $(F), (H)$.

§ 10. Kerne linearer Operationen.

I. Im Gebiete der Variablen $x_1, \ldots x_n$ sei A eine lineare Operation für die Schar (F). Wenn die Besonderheit eintritt, daß die Funktionen von (F) bloß von $x_1, \ldots x_\nu$ und die Funktionen von $\mathsf{A}(F)$ bloß von $x_{\nu+1}, \ldots x_n$ abhängen, so sagen wir, daß in A die Variablen $x_1, \ldots x_n$ sich in $x_1, \ldots x_\nu$ und $x_{\nu+1}, \ldots x_n$ trennen.

Dieser Fall der getrennten Variablen hat aber ebensoviel Interesse wie der allgemeine Fall, weil sich dieser auf ihn durch bloße Änderung der Bezeichnung zurückführen läßt. Ist nämlich im Gebiete der Variablen $x_1, \ldots x_n$ (F) eine beliebige Schar und A eine beliebige lineare Operation für (F), so führe man neue Variable $\xi_1, \ldots \xi_n$ ein und definiere im Gebiete der $2n$ Variablen x und ξ eine lineare Operation A_1 für (F), indem man, wenn $\mathsf{A}F(x) = N(x)$ ist, $\mathsf{A}_1 F(x) = N(\xi)$ festsetzt. Dann bietet A_1 den Fall der

getrennten Variablen dar, und das Studium von A_1 ist dem von A gleichwertig.

Im folgenden betrachten wir im Gebiete von $n+\nu$ Variablen

$$x_1, \ldots x_n; \xi_1, \ldots \xi_\nu$$

für Scharen (F) lineare Operationen A, bei welchen sich die Variablen in der Weise trennen, daß die Funktionen von (F) bloß von den x, die Funktionen von $\mathsf{A}(F)$ bloß von den ξ abhängen:

$$N(\xi) = \mathsf{A}F(x). \tag{66.}$$

II. Für die Schar (F) von Funktionen der Variablen $x_1, \ldots x_n$ sei eine Faltung gegeben.

Ist nun die Funktion $A(\xi; x)$ der Variablen $x_1, \ldots x_n; \xi_1, \ldots \xi_\nu$ eine zweireihige Funktion über (F), so ist, da für jedes einzelne Wertsystem der ξ die Funktion $A(\bar{\xi}; x)$ zu (F) gehört, die Größe

$$\bar{A}(\xi; \cdot)F(\cdot)$$

zunächst für jedes einzelne Wertsystem der ξ definiert. Diese Größe ist aber eine ganze rationale Funktion der ξ; denn wenn $A(\xi; x) = Q_1(\xi)F_1(x) + \cdots + Q_\varrho(\xi)F_\varrho(x)$ gesetzt wird, worin $F_1(x), \ldots F_\varrho(x)$ zu (F) gehören, so ist $\bar{A}(\xi; \cdot)F(\cdot) = [\bar{F}_1(\cdot)F(\cdot)]\bar{Q}_1(\xi) + \cdots + [\bar{F}_\varrho(\cdot)F(\cdot)]\bar{Q}_\varrho(\xi)$.

Daher kann man eine lineare Operation A für (F) definieren, indem man für jede Funktion $F(x)$ aus (F)

$$\mathsf{A}F(x) = \bar{A}(\xi; \cdot)F(\cdot) \tag{67.}$$

setzt. A bietet den durch (66.) angedeuteten Fall getrennter Variablen dar. Wir nennen A *die* vermöge der gegebenen Faltung *aus dem Kerne* $A(\xi; x)$ *entstandene lineare Operation* für (F). Dabei ist also $A(\xi; x)$ eine zweireihige Funktion über (F).

Wir behaupten nun folgende Sätze:

Satz 26. Eine lineare Operation A für (F), welche den Fall (66.) der getrennten Variablen darbietet, kann aus höchstens einem Kern $A(\xi; x)$ entstehen.

Wenn daher A aus einem Kerne $A(\xi; x)$ entsteht, so können wir $A(\xi; x)$ *den Kern der Operation* A nennen.

Satz 27. Damit eine lineare Operation A für (F), welche den Fall (66.) der getrennten Variablen darbietet, einen Kern besitzt, ist not-

wendig und hinreichend, daß A endlich ist und die größte zu $(F)_A$ orthogonale Schar denselben Rang wie A hat. (Vgl. den Schluß von § 3 I.)

Satz 28. Wenn $A(\xi; x)$ der Kern der linearen Operation A für (F) ist, so ist der Rang von $A(\xi; x)$ gleich dem Range von A, die ξ-Schar von $A(\xi; x)$ mit der Schar $\overline{\mathsf{A}(F)}$ identisch und die x-Schar von $A(\xi; x)$ die größte zu $(F)_A$ orthogonale Schar; die x-Schar von $A(\xi; x)$ bildet einen Grundbereich für A.

Zum Beweise der Sätze 26., 27., 28. dienen die folgenden Betrachtungen.

Es sei eine zweireihige Funktion $A(\xi; x)$ über (F) vorgelegt. Ist

$$A(\xi; x) = \bar{N}_1(\xi)\, F_1(x) + \cdots + \bar{N}_\varrho(\xi)\, F_\varrho(x)$$

eine solche Darstellung dieser Funktion, daß $F_1(x), \ldots F_\varrho(x)$ zu (F) gehören und linearunabhängig sind, so ist die kleinste die Funktionen $\bar{N}_1(\xi), \ldots \bar{N}_\varrho(\xi)$ umfassende Schar mit der ξ-Schar von $A(\xi; x)$ identisch und die Determinante $|m_{\alpha\beta}|$, worin $m_{\alpha\beta} = \bar{F}_\alpha(\cdot) F_\beta(\cdot)$ ist, nach Satz 12. von 0 verschieden. Da nun, wenn A die aus dem Kerne $A(\xi; x)$ entstandene lineare Operation für (F) bedeutet, für jede Funktion $F(x)$ aus (F)

$$\mathsf{A}F(x) = [\bar{F}_1(\cdot) F(\cdot)] N_1(\xi) + \cdots + [\bar{F}_\varrho(\cdot) F(\cdot)] N_\varrho(\xi)$$

ist, so ist $\mathsf{A}(F) \leqq$ der kleinsten $N_1(\xi), \ldots N_\varrho(\xi)$ umfassenden Schar. Da aber die Gleichungen

$$\mathsf{A}F_1(x) = m_{11} N_1(\xi) + \cdots + m_{\varrho 1} N_\varrho(\xi)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathsf{A}F_\varrho(x) = m_{1\varrho} N_1(\xi) + \cdots + m_{\varrho\varrho} N_\varrho(\xi)$$

bestehen und wegen des Nichtverschwindens der Determinante nach den Funktionen $N_1(\xi), \ldots N_\varrho(\xi)$ aufgelöst werden können, so gehören diese selbst zu $\mathsf{A}(F)$. Es ist daher die kleinste $N_1(\xi), \ldots N_\varrho(\xi)$ umfassende Schar mit $\mathsf{A}(F)$, die ξ-Schar von $A(\xi; x)$ also mit $\overline{\mathsf{A}(F)}$ identisch und der Rang von $A(\xi; x)$ gleich dem Range von A. — Ist dagegen

$$A(\xi; x) = Q_1(\xi)\, M_1(x) + \cdots + Q_\varrho(\xi)\, M_\varrho(x)$$

eine solche Darstellung der Funktion $A(\xi; x)$, daß $Q_1(\xi), \ldots Q_\varrho(\xi)$ linearunabhängig sind, so ist die kleinste $M_1(x), \ldots M_\varrho(x)$ umfassende Schar mit der x-Schar von $A(\xi; x)$ identisch und daher $\leqq (F)$. Nun besteht $(F)_A$ aus denjenigen Funktionen $\Phi(x)$ aus (F), welche der Gleichung $\mathsf{A}\Phi(x) = 0$

oder $[\overline{M}_1(\cdot)\,\Phi(\cdot)]\,\overline{Q}_1(\xi)+\cdots+[\overline{M}_\varrho(\cdot)\,\Phi(\cdot)]\,\overline{Q}_\varrho(\xi)=0$ genügen; diese ist aber wegen der Linearunabhängigkeit der $\overline{Q}_1(\xi),\ldots\overline{Q}_\varrho(\xi)$ mit dem System

$$\overline{M}_1(\cdot)\,\Phi(\cdot)=0,\ldots\overline{M}_\varrho(\cdot)\,\Phi(\cdot)=0$$

gleichbedeutend. Also ist $(F)_\mathsf{A}$ die größte zu der x-Schar von $A(\xi;x)$ orthogonale Schar. Da aber die x-Schar endlich ist, so ist $(F)_\mathsf{A}$ zu ihr in (F) komplementär. Daraus erhellt sowohl, daß die x-Schar einen Grundbereich für A bildet, als auch nach Satz 13., daß umgekehrt die x-Schar die größte zu $(F)_\mathsf{A}$ orthogonale Schar ist. — Bezeichnen wir jetzt mit ϱ den Rang von A und mit $M_1(x),\ldots M_\varrho(x)$ irgend ϱ linearunabhängige Funktionen aus der größten zu $(F)_\mathsf{A}$ orthogonalen Schar, so sind in derjenigen Darstellung

$$(68.)\qquad A(\xi;x)=\overline{N}_1(\xi)\,M_1(x)+\cdots+\overline{N}_\varrho(\xi)\,M_\varrho(x),$$

in welcher gerade diese Funktionen $M_1(x),\ldots M_\varrho(x)$ auftreten, die Funktionen $N_1(\xi),\ldots N_\varrho(\xi)$ durch das System

$$(69.)\qquad \begin{cases} \mathsf{A}\,M_1(x)=m_{11}N_1(\xi)+\cdots+m_{\varrho 1}N_\varrho(\xi)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathsf{A}\,M_\varrho(x)=m_{1\varrho}N_1(\xi)+\cdots+m_{\varrho\varrho}N_\varrho(\xi)\end{cases}$$

von Gleichungen mit nichtverschwindender Determinante gegeben, worin $m_{\alpha\beta}=\overline{M}_\alpha(\cdot)\,M_\beta(\cdot)$ gesetzt ist. Daher ist $A(\xi;x)$ durch A völlig bestimmt.

Ist umgekehrt die lineare Operation A für (F), welche den Fall (66.) der getrennten Variablen darbietet, endlich und vom Range ϱ und ist die größte zu $(F)_\mathsf{A}$ orthogonale Schar (M) ebenfalls vom Range ϱ, so wählen wir aus (M) ϱ linearunabhängige Funktionen $M_1(x),\ldots M_\varrho(x)$ und konstruieren eine Funktion $A(\xi;x)$ nach (69.), (68.). Dann ist $A(\xi;x)$ eine zweireihige Funktion über (F) und die Gleichung (67.) zunächst für alle $F(x)$ aus (M) erfüllt. Ferner ist $\overline{A}(\xi;\cdot)\,\Phi(\cdot)=0$ für alle $\Phi(x)$ aus $(F)_\mathsf{A}$. Da aber (M) und $(F)_\mathsf{A}$ in (F) komplementär sind, so besteht die Gleichung (67.) für alle $F(x)$ aus (F), die Operation A besitzt also einen Kern.

III. Es seien eine Schar (F) von Funktionen der x allein, eine Schar (G) von Funktionen der ξ allein und für jede dieser Scharen eine Faltung gegeben.

Ist $A(\xi;x)$ eine zweireihige Funktion über (F), $\overline{(G)}$ und sind $F(x)$, $G(\xi)$ beliebige Funktionen aus (F), (G), so kann man die zu (G), $\overline{(F)}$

gehörigen Funktionen

$$(70.) \qquad \begin{cases} N(\xi) = \bar{A}(\xi; \cdot) F(x), \\ \overline{M}(x) = \bar{G}(\cdot\cdot)\, \bar{A}(\cdot\cdot; x) \end{cases}$$

bilden. Wir wollen nun zeigen, daß

$$(71.) \qquad \bar{G}(\cdot\cdot) N(\cdot\cdot) = \overline{M}(\cdot) F(\cdot)$$

ist, sodaß man diese Größe passend mit

$$\bar{G}(\cdot\cdot)\, \bar{A}(\cdot\cdot; \cdot)\, F(\cdot)$$

bezeichnen kann. Setzt man nämlich $A(\xi; x) = \sum_1^{\varrho} \bar{G}_\alpha(\xi)\, F_\alpha(x)$, worin die $F_\alpha(x)$ zu (F), die $G_\alpha(\xi)$ zu (G) gehören, so werden beide Seiten von (71.) gleich $\sum_1^{\varrho} [\bar{G}(\cdot\cdot) G_\alpha(\cdot\cdot)]\, [\bar{F}_\alpha(\cdot) F(\cdot)]$.

Satz 29. Ist $A(\xi; x)$ eine zweireihige Funktion über (F), $\overline{(G)}$, so bilden die aus den Kernen $A(\xi; x)$, $\bar{A}(\xi; x)$ entstehenden linearen Operationen A, B für (F), (G) ein reziprokes Paar endlicher Operationen.

A, B sind nämlich durch die für beliebige $F(x)$, $G(\xi)$ aus (F), (G) geltenden Gleichungen

$$\mathsf{A}\, F(x) = \bar{A}(\xi; \cdot) F(\cdot),$$
$$\mathsf{B}\, G(\xi) = A(\cdot\cdot; x)\, G(\cdot\cdot)$$

definiert. Daher ist $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$, $\mathsf{B}(G) \leqq (F)$*). Setzt man nun $\mathsf{A}\, F(x) = N(\xi)$, $\mathsf{B}\, G(\xi) = M(x)$, so ist nach Satz 11. $\overline{M}(\bar{x}) = \bar{G}(\cdot\cdot)\, \overline{A}(\cdot\cdot; \bar{x})$, also auch $\overline{M}(x) = \bar{G}(\cdot\cdot)\, \overline{A}(\cdot\cdot; x)$. Es bestehen also die Gleichungen (70.), aus denen (71.) folgt. Damit ist Satz 29. bewiesen.

Nach den Sätzen 28. und 16. haben dabei A, B denselben Rang wie $A(\xi; x)$; $\mathsf{B}(G)$ ist die x-Schar und $\overline{\mathsf{A}(F)}$ die ξ-Schar von $A(\xi; x)$.

Unter Beibehaltung der über (F), (G) gemachten Annahmen sind nun für eine lineare Operation A für (F) die beiden Eigenschaften

Eigenschaft α: A besitzt einen Kern, und dieser ist eine zweireihige Funktion über $\overline{(G)}$,

Eigenschaft β: A genügt der Bedingung $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$, A ist endlich,

---

*) Zugleich erfahren $\mathsf{R} = \mathsf{B}\,\mathsf{A}$, $\mathsf{S} = \mathsf{A}\,\mathsf{B}$ durch Vermittlung der Funktionen $R(x; y) = A(\cdot\cdot; y)\, \bar{A}(\cdot\cdot; x)$, $S(\xi; \eta) = \bar{A}(\eta; \cdot)\, A(\xi; \cdot)$ die Darstellungen $\mathsf{R}\, F(x) = \bar{R}(x; \cdot)\, F(\cdot)$, $\mathsf{S}\, G(\xi) = \bar{S}(\xi; \cdot\cdot)\, G(\cdot\cdot)$.

und die größte zu $(F)_{\mathsf{A}}$ orthogonale Schar hat denselben Rang wie A nach den Sätzen 27., 28. gleichbedeutend. Wir können jetzt zeigen, daß mit ihnen auch die weitere Eigenschaft

Eigenschaft γ: A ist endlich und Teil eines reziproken Paares A, B für $(F), (G)$

gleichbedeutend ist. Aus γ folgt nämlich β nach Satz 16., und aus α folgt γ nach Satz 29. Insbesondere gilt also:

Satz 30. Damit die endliche lineare Operation A für (F) Teil eines reziproken Paares A, B für $(F), (G)$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$ ist und die größte zu $(F)_{\mathsf{A}}$ orthogonale Schar denselben Rang wie A hat*).

Schließlich ergibt sich die Umkehrung des Satzes 29. Ist nämlich A, B ein reziprokes Paar endlicher Operationen für (F), (G), so besitzt A einen Kern $A(\xi; x)$, der eine zweireihige Funktion über $\overline{(G)}$ ist. Die aus dem Kerne $\bar{A}(\xi; x)$ entstehende lineare Operation für (G) bildet nun nach Satz 29. mit A ein reziprokes Paar und muß daher nach Satz 17. mit B identisch sein. Wir fassen diese Umkehrung von 29. mit 29. und 26. zusammen zu dem Satze:

Satz 31. Man erhält alle reziproken Paare endlicher linearer Operationen A, B für (F), (G) und jedes nur einmal, wenn man $A(\xi; x)$ alle zweireihigen Funktionen über (F), $\overline{(G)}$ durchlaufen läßt und unter A die aus dem Kerne $A(\xi; x)$ entstehende lineare Operation für (F), unter B die aus dem Kerne $\bar{A}(\xi; x)$ entstehende lineare Operation für (G) versteht.

IV. Werden für (F), (G) die Hauptfaltungen zugrunde gelegt, so sind die Operationen des Satzes 29. durch

$$(72.) \qquad \begin{cases} \mathsf{A}\, F(x) = \left[\bar{A}\left(\xi; \dfrac{\partial}{\partial x}\right) F(x)\right]_{x=0}, \\ \mathsf{B}\, G(\xi) = \left[A\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi}; x\right) G(\xi)\right]_{\xi=0} \end{cases}$$

gegeben. Sind insbesondere für die Variablen x und ξ Gewichte > 0 festgesetzt und sind die Funktionen von (F) isobar vom Gewicht s, die Funk-

*) Da die Annahme getrennter Variablen, wie in I. bemerkt, keine wesentliche Beschränkung bedeutet, so ist damit zugleich der in der Fußnote am Schlusse von § 3 II. erwähnte Satz bewiesen.

tionen von (G) isobar vom Gewicht σ und die Funktion $A(\xi; x)$ in den x allein isobar vom Gewicht s, in den ξ allein isobar vom Gewicht σ, so kann man (72.) die Gestalt

$$(73.)\qquad \begin{cases} \mathsf{A}\, F(x) = \bar{A}\left(\xi; \dfrac{\partial}{\partial x}\right) F(x), \\ \mathsf{B}\, G(\xi) = A\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi}; x\right) G(\xi) \end{cases}$$

geben.

Wir wollen dies auf das Beispiel des Satzes 25. anwenden. Es seien also den Variablen $x_1, \ldots x_n$ Gewichte > 0 erteilt und ein Paar isobarer reziproker Polarenprozesse $\bar{f}\left(x; \dfrac{\partial}{\partial x}\right), f\left(\dfrac{\partial}{\partial x}; x\right)$ von den Gewichten $-l, l$ gegeben. Wir nehmen neue Variable $\xi_1, \ldots \xi_n$ zu Hilfe, denen wir dieselben Gewichte wie den gleichstelligen Variablen $x_1, \ldots x_n$ erteilen, und verstehen unter (F) die Gesamtheit aller isobaren Funktionen der x vom Gewicht s, unter (G) die Gesamtheit aller isobaren Funktionen der ξ vom Gewicht $s-l$. Wir definieren nun die linearen Operationen A, B für (F), (G) durch die für beliebige $F(x)$ aus (F), $G(\xi)$ aus (G) gültigen Gleichungen

$$\mathsf{A}\, F(x) = \bar{f}\left(\xi; \frac{\partial}{\partial \xi}\right) F(\xi),$$

$$\mathsf{B}\, G(\xi) = f\left(\frac{\partial}{\partial x}; x\right) G(x).$$

Um nun eine zweireihige Funktion $A(\xi; x)$ zu konstruieren, für welche (72.) gilt, kann man sich der Formeln (54.), (56.) bedienen; da nämlich (F), (G) endlich sind, so treten in den Funktionen $\bar{f}\left(\xi; \dfrac{\partial}{\partial x}\right) F(x), f\left(\dfrac{\partial}{\partial x}; \xi\right) G(x)$ für alle möglichen $F(x), G(\xi)$ aus $(F), (G)$ nur endlich viele Potenzprodukte der x auf, und man kann daher (54.) so konstruieren, daß in der Summe $\sum_a$ alle diese Potenzprodukte vertreten sind. Soll aber $A(\xi; x)$ der Kern von A sein, so muß außer dem Bestehen von (72.) auch noch gefordert werden, daß $A(\xi; x)$ eine zweireihige Funktion über (F) ist; daher muß $A(\xi; x)$ folgendermaßen konstruiert werden: Man setze $f(\xi; x) = \sum_1^\tau f_a(\xi; x)$, worin $f_a(\xi; x)$ in den x allein isobar vom Gewicht l_a, in den ξ allein isobar vom Gewicht $l_a - l$ ist. Ferner verstehe man unter $\omega_a(\xi; x)$ diejenige Funktion (54.), in welcher die Summe $\sum_a$ über alle Potenzprodukte $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ vom

Gewicht $s - l_a$ erstreckt ist, vorausgesetzt, daß es solche gibt; andernfalls setze man $\omega_a(\xi; x) = 0$. Dann ist

$$A(\xi; x) = \sum_{1}^{\tau} \omega_a(\xi; x)\, f_a(\xi; x)$$

der Kern von A. Wie man sieht, liegt seine Abhängigkeit von s in den Funktionen $\omega_a(\xi; x)$. Es bestehen für ihn die Gleichungen (73.).

V. Ist die Schar (F) von Funktionen der x *endlich*, so hat nach Satz 27. jede lineare Operation A für (F), welche den Fall (66.) der getrennten Variablen darbietet, in bezug auf eine gegebene Faltung von (F) einen Kern.

Ist speziell die Anzahl ν der Variablen ξ gleich der Anzahl n der Variablen x und ist A diejenige lineare Operation für (F), welche durch die für jede Funktion $F(x)$ von (F) gültige Gleichung

$$F(\xi) = \mathsf{A}\, F(x)$$

definiert ist, so nennen wir den Kern von A den Einheitskern der endlichen Schar (F) in bezug auf die gegebene Faltung*).

Ist z. B. (F) die Schar aller derjenigen Funktionen $F(x)$, in welchen nur endlich viele gegebene Potenzprodukte $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ auftreten, und wird für (F) die Hauptfaltung gewählt, so ist der Einheitskern die mit den gegebenen Potenzprodukten gebildete Funktion (54.).

§ 11. Die algebraischen Relationen zwischen gegebenen Funktionen.

I. Wir betrachten die zweireihige Funktion

$$A(\xi; x) = \sum_{a} \frac{\xi_1^{a_1} \dots \xi_\nu^{a_\nu} f_1^{a_1}(x) \dots f_\nu^{a_\nu}(x)}{\alpha_1! \dots \alpha_\nu!}.$$

Darin erstreckt sich die Summe $\sum_a$ über endlich viele gegebene voneinander verschiedene Systeme $(\alpha) = (\alpha_1, \dots \alpha_\nu)$ von je ν ganzen nichtnegativen

---

*) Hat (F) den Rang ϱ, sind $F_1(x), \dots F_\varrho(x)$ ϱ linearunabhängige Funktionen aus (F), wird $m_{\alpha\beta} = \overline{F}_\alpha(\cdot)\, F_\beta(\cdot)$ gesetzt und die Determinante $|m_{\alpha\beta}|$ mit Δ bezeichnet, so ist der Einheitskern $A(\xi; x)$ durch

$$A(\xi; x) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} m_{11}, \dots & m_{1\varrho}, \overline{F}_1(\xi) \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ m_{\varrho 1}, \dots & m_{\varrho\varrho}, \overline{F}_\varrho(\xi) \\ F_1(x), \dots F_\varrho(x), & 0 \end{vmatrix}$$

gegeben.

Zahlen; $f_1(x), \dots f_\nu(x)$ sind gegebene Funktionen der Variablen $x_1, \dots x_n$; $f_i^{a_i}(x)$ bedeutet $[f_i(x)]^{a_i}$.

Die x-Schar von $A(\xi; x)$ bezeichnen wir mit (M), die ξ-Schar mit $\overline{(N)}$. Die Schar (N) ist $\leqq (G^*)$, wenn (G^*) die Gesamtheit aller Funktionen von der Gestalt

$$(74.) \qquad G^*(\xi) = \sum_a a_{a_1 \dots a_\nu} \xi_1^{a_1} \dots \xi_\nu^{a_\nu}$$

bedeutet, worin die Summe $\sum_a$ über die gegebenen Systeme (α) erstreckt wird und die a Konstanten bedeuten. Die Schar (M) ist die Gesamtheit aller derjenigen Funktionen $M(x)$, welche sich auf mindestens eine Weise in die Gestalt

$$M(x) = G^*(f(x))$$

setzen lassen, worin $G^*(\xi)$ eine Funktion aus (G^*) bedeutet; dies erhellt daraus, daß in dem Ausdruck für $A(\xi; x)$ die Potenzprodukte $\xi_1^{a_1} \dots \xi_\nu^{a_\nu}$ linearunabhängig sind.

Ist nun (F) eine solche Schar von Funktionen der x allein und (G) eine solche Schar von Funktionen der ξ allein, daß

$$(M) \leqq (F), \qquad (N) \leqq (G)$$

ist, so können wir das reziproke Paar A, B von endlichen linearen Operationen für (F), (G) bilden, welches aus den Kernen $A(\xi; x)$, $\bar{A}(\xi; x)$ in bezug auf die Hauptfaltungen entsteht, also nach (72.) durch die für beliebige Funktionen $F(x)$, $G(\xi)$ aus (F), (G) gültigen Gleichungen

$$(75.) \qquad \mathsf{A}F(x) = \sum_a \left[\frac{\bar{f}_1^{a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \dots \bar{f}^{a_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}{\alpha_1! \dots \alpha_\nu!} F(x) \right]_0 \xi_1^{a_1} \dots \xi_\nu^{a_\nu},$$

$$\mathsf{B}\,G(\xi) = \sum_a \left[\frac{\partial^{a_1}}{\partial \xi_1^{a_1}} \dots \frac{\partial^{a_\nu}}{\partial \xi_\nu^{a_\nu}} G(\xi) \right]_0 \frac{f_1^{a_1}(x) \dots f_\nu^{a_\nu}(x)}{\alpha_1! \dots \alpha_\nu!}$$

gegeben ist. Dabei ist $\mathsf{A}(F) = (N)$, $\mathsf{B}(G) = (M)$.

Um die Operation B einfacher zu beschreiben, führen wir folgende Bezeichnung ein. Wenn wir eine Funktion $G(\xi)$ in die Summe einer Funktion aus (G^*) und einer zu (G^*) in bezug auf die Hauptfaltung orthogonalen (d. h. keine Potenzprodukte mit den gegebenen Exponentensystemen (α) enthaltenden) Funktion zerlegen, so wollen wir stets die erstere mit $G^*(\xi)$ bezeichnen. Dann ist für jede Funktion $G(\xi)$ aus (G)

$$\mathsf{B}G(\xi) = G^*(f(x)).$$

Wir setzen noch $(F)_{\mathsf{A}} = (\Phi)$, $(G)_{\mathsf{B}} = (\Psi)$. Dann ist (Ψ) die Gesamtheit derjenigen Funktionen $\Psi(\xi)$ aus (G), für welche

$$\Psi^*(f(x)) = 0$$

ist, und (Φ) die Gesamtheit derjenigen Funktionen $\Phi(x)$ aus (F), welche dem System von endlich vielen Gleichungen

$$\left[\bar{f}_1^{a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \dots \bar{f}_\nu^{a_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x)\right]_0 = 0$$

genügen, welche den gegebenen Systemen (α) entsprechen.

Die Operationen $\mathsf{R} = \mathsf{BA}$, $\mathsf{S} = \mathsf{AB}$ sind durch die für beliebige $F(x)$, $G(\xi)$ aus (F), (G) gültigen Gleichungen

$$\mathsf{R}F(x) = \sum_{\alpha}^{\varepsilon} \left[\frac{\bar{f}_1^{a_1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \dots \bar{f}_\nu^{a_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}{\alpha_1! \dots \alpha_\nu!} F(y)\right]_0 f_1^{a_1}(x) \dots f_\nu^{a_\nu}(x),$$

$$\mathsf{S}G(\xi) = \sum_{\alpha} \left[\frac{\bar{f}_1^{a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \dots \bar{f}_\nu^{a_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}{\alpha_1! \dots \alpha_\nu!} G^*(f(x))\right]_0 \xi_1^{a_1} \dots \xi_\nu^{a_\nu}$$

gegeben*).

Indem man nun die Sätze 2., 3., 5., 9., 16. anwendet und jeweils über (F), (G) passend verfügt, erhält man folgende Resultate.

Zunächst gewinnt man eine einfache Beschreibung der Schar (N). Man erhält sie, indem man Satz 16. auf $\mathsf{A}(F) = (N)$ anwendet und dabei $(G) = (G^*)$ wählt. Es gehört nämlich die Funktion (74.) dann und nur dann zu (N), wenn für jede zwischen den Funktionen $\frac{\bar{f}_1^{a_1}(x) \dots \bar{f}_\nu^{a_\nu}(x)}{\alpha_1! \dots \alpha_\nu!}$ bestehende linearhomogene Relation

$$\sum_{\alpha} w_{a_1 \dots a_\nu} \frac{\bar{f}_1^{a_1}(x) \dots \bar{f}_\nu^{a_\nu}(x)}{\alpha_1! \dots \alpha_\nu!} = 0$$

mit konstanten Koeffizienten w auch zwischen den Koeffizienten $a_{a_1 \dots a_\nu}$ von (74.) die Relation

$$\sum_{\alpha} w_{a_1 \dots a_\nu} a_{a_1 \dots a_\nu} = 0$$

statthat. In der Sprache von *Clebsch* heißt das: (N) besteht aus denjenigen Funktionen der ξ, welche der symbolischen Darstellung

---

*) Man vergleiche zu dieser Darstellung von S, und überhaupt zu den Entwicklungen dieses §, die Behandlung des verallgemeinerten Beispiels der Linienkomplexe auf den beiden letzten Seiten der zitierten Arbeit von *Mertens*.

$$(76.) \qquad \sum_{a} \frac{\bar{f}_1^{a_1}(\mathfrak{x}) \dots \bar{f}_\nu^{a_\nu}(\mathfrak{x})}{\alpha_1! \dots \alpha_\nu!} \xi_1^{a_1} \dots \xi_\nu^{a_\nu}$$

oder $\bar{A}(\xi; \mathfrak{x})$ mit den Symbolen $\mathfrak{x}_1, \dots \mathfrak{x}_n$ fähig sind.

Anderseits sieht man wegen $\mathsf{A}(F) = (N)$ aus (75.), indem man $(F) = (\Omega)$ wählt, daß die Funktion (74.) dann und nur dann zu (N) gehört, wenn es mindestens eine solche Funktion $F(x)$ der x gibt, daß die Koeffizienten a von (74.) durch

$$(77.) \qquad a_{a_1 \dots a_\nu} = \left[\frac{\bar{f}_1^{a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \dots \bar{f}_\nu^{a_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}{\alpha_1! \dots \alpha_\nu!} F(x) \right]_0$$

ausgedrückt werden. Es besteht daher der Satz, daß jede der symbolischen Darstellung (76.) fähige Funktion auch der realen, durch die rechte Seite von (75.) gegebenen, Darstellung fähig ist.

Wendet man Satz 16. auf $\mathsf{B}(G) = (M)$ an, ohne (F) außer der Bedingung $(M) \leqq (F)$ einer weiteren Bedingung zu unterwerfen, so ergibt sich: wenn $F_0(x)$ aus (F) die Eigenschaft hat, daß für alle dem System der endlich vielen Gleichungen $\left[\bar{f}_1^{a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \dots \bar{f}_\nu^{a_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi(x)\right]_0 = 0$ genügenden $\Phi(x)$ aus (F) auch die Gleichung $\left[\bar{F}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi(x)\right]_0 = 0$ besteht, so kann man $F_0(x) = \sum_a a_{a_1 \dots a_\nu} f_1^{a_1}(x) \dots f_\nu^{a_\nu}(x)$ setzen, worin die a Konstanten bedeuten; die (α) durchlaufen dabei die gegebenen Systeme.

In der Darstellung (77.) der Koeffizienten einer Funktion von (N) kann man $F(x)$ auf eine und nur eine Weise als Funktion aus (M) wählen. In der Darstellung $M(x) = G^*(f(x))$ einer Funktion $M(x)$ von (M) kann man die zu (G^*) gehörige Funktion $G^*(x)$ auf eine und nur eine Weise als Funktion aus (N) wählen.

Jede Funktion $F(x)$ der Variablen x läßt sich auf eine und nur eine Weise in die Summe

$$(78.) \qquad F(x) = M(x) + \Phi(x)$$

einer Funktion $M(x)$ aus (M) und einer den endlich vielen Gleichungen $\left[\bar{f}_1^{a_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \dots \bar{f}_\nu^{a_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi(x)\right]_0 = 0$, welche den gegebenen Systemen (α) entsprechen, genügenden Funktion $\Phi(x)$ zerlegen. Jede Funktion $G(\xi)$ von (G) läßt sich auf eine und nur eine Weise in die Summe

(79.) $$G(\xi) = N(\xi) + \Psi(\xi)$$

einer Funktion $N(\xi)$ aus (N) und einer der Bedingung $\Psi^*(f(x)) = 0$ genügenden Funktion $\Psi(\xi)$ zerlegen.

Es gibt solche Konstanten $a_1, \dots a_r$, daß die Zerlegungen (78.), (79.) durch

$$M(x) = (a_1 \mathsf{R} + \cdots + a_r \mathsf{R}^r)\, F(x), \qquad N(\xi) = (a_1 \mathsf{S} + \cdots + a_r \mathsf{S}^r)\, G(\xi)$$

gegeben sind.

II. Es seien den Variablen $\xi_1, \dots \xi_\nu$ Gewichte $l_1 > 0, \dots l_\nu > 0$ erteilt. Wir bezeichnen mit (Θ) die Gesamtheit aller derjenigen isobaren Funktionen $\Theta(\xi)$, welche der Gleichung $\Theta(f(x)) = 0$ genügen. Nach einem bekannten für beliebige Mengen ganzer rationaler Funktionen gültigen Satz von *Hilbert* kann man aus (Θ) endlich viele Funktionen $\Theta_1(\xi), \dots \Theta_k(\xi)$ so herausgreifen, daß für jede Funktion $\Theta(\xi)$ aus (Θ) die Kongruenz $\Theta(\xi) \equiv 0$ modd. $\Theta_1(\xi), \dots \Theta_k(\xi)$ besteht. Dann ist (Θ) die Gesamtheit aller dieser Kongruenz genügenden isobaren Funktionen.

Nun sei ein Gewicht s gegeben, und zwar so, daß es von 0 verschiedene isobare Funktionen vom Gewicht s gibt. Dann sind die beiden folgenden Scharen identisch: die Schar (Ψ) aller der Gleichung

$$\Psi(f(x)) = 0$$

genügenden isobaren Funktionen $\Psi(\xi)$ vom Gewicht s; die Schar (Ψ') aller der Kongruenz

$$\Psi'(\xi) \equiv 0 \text{ modd. } \Theta_1(\xi), \dots \Theta_k(\xi)$$

genügenden isobaren Funktionen $\Psi'(\xi)$ vom Gewicht s. Wenden wir nun die Betrachtungen aus I. auf den Fall an, daß (G^*) die Schar aller isobaren Funktionen vom Gewicht s ist und $(G) = (G^*)$ gewählt wird, so finden wir als die größte zu (Ψ) in bezug auf die Hauptfaltung von (G^*) orthogonale Schar die Schar (N) aller derjenigen isobaren Funktionen $N(\xi)$ vom Gewicht s, welche sich vermittelst einer Funktion $F(x)$ aus (F) in die Gestalt

(80.) $$N(\xi) = \sum_{\alpha} \left[\frac{\bar{f}_1^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \dots \bar{f}_\nu^{\alpha_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}{\alpha_1! \dots \alpha_\nu!} F(x) \right]_0 \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_\nu^{\alpha_\nu}$$

bringen lassen, worin die Summe $\sum_{\alpha}$ so erstreckt wird, daß $\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_\nu^{\alpha_\nu}$ alle Potenzprodukte vom Gewicht s durchläuft. Dagegen ist die größte zu (Ψ')

in bezug auf die Hauptfaltung von (G^*) orthogonale Schar nach § 6 II. die Gesamtheit (N') derjenigen isobaren Funktionen $N'(\xi)$ vom Gewicht s, welche den Bedingungen

$$(81.) \qquad \bar{\Theta}_1\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right) N'(\xi) = 0, \ldots \bar{\Theta}_k\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right) N'(\xi) = 0$$

genügen. Da nun $(\Psi) = (\Psi')$ ist, so muß auch $(N) = (N')$ sein. *Es besteht daher der Satz, daß die isobaren Lösungen von* (81.) *des Gewichtes s durch* (80.) *gegeben sind. Zugleich läßt sich der Satz von der Zerlegung* (79.) *in vier Fassungen aussprechen*, die wir durch $G = N + \Psi = N' + \Psi' = N' + \Psi = N + \Psi'$ andeuten.

Unter den Lösungen $\Theta(\xi)$ der Gleichung $\Theta(f(x)) = 0$ die isobaren auszuzeichnen, hat besonders dann ein Interesse, wenn $f_1(x), \ldots f_\nu(x)$ isobar und von den Gewichten $l_1, \ldots l_\nu$ in bezug auf Gewichte $h_1 > 0, \ldots h_n > 0$ der Variablen x sind. In diesem Falle ist (M) eine isobare Schar vom Gewicht s, und man kann für (F) die Gesamtheit aller isobaren Funktionen der x vom Gewicht s wählen. Dann können in allen Formeln dieses § die Zeichen $[]_0$, welche das Nullsetzen der Variablen anzeigen, weggelassen werden.

In diesen Entwicklungen ist als Beispiel die am Schlusse der Einleitung erwähnte doppelte Auffassung der *Clebsch-Gordan*schen Reihenentwicklung und ihrer Verallgemeinerungen enthalten. An die Stelle unserer Funktionen $\Theta_1(\xi), \ldots \Theta_k(\xi)$ tritt dabei eine Determinante*).

§ 12. Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Um die Behandlung konkreter Beispiele aus dem Gebiete der Differentiationsprozesse der Algebra vorzubereiten, bedarf es noch der Heranziehung gewisser Prinzipien, die aus der Theorie der Matrices wohlbekannt sind**). Statt die, in mannigfacher Weise mögliche, Zurückführung auf die

---

*) Ich kann hier auf Abschnitt III. der zitierten Arbeit von Frl. *Noether* verweisen. Wenn übrigens Frl. *Noether* in der Einleitung ihrer Arbeit „unveröffentlichte Sätze“ von mir zitiert, so sind damit eben Sätze aus dem gegenwärtigen § gemeint, die ich damals durch direkte Verifikation bewiesen hatte.

**) Sie sind, wie ich nachträglich durch Herrn *Ostrowski* erfahre, auch im Gebiete der Differentiationsprozesse der Algebra schon zur Geltung gebracht worden durch die invariantentheoretische Habilitationsschrift von *Hilbert* (Math. Ann. 28) und den anschließenden Brief an Hermite (Journ. de math. 1888).

Theorie der Matrices vorzunehmen, erscheint es sachgemäßer, eine der Methoden, welche in der Theorie der Matrices zum Ziele führen, direkt ohne Vermittlung von Koordinatensystemen auf unsern Gegenstand anzuwenden. In den Resultaten sind dann die analogen aus der Theorie der Matrices oder der Bilinearformen unmittelbar als Spezialfälle enthalten.

I. Es sei (F) eine Schar von Funktionen der Variablen $x_1, \dots x_n$, (G) eine Schar von Funktionen der Variablen $\xi_1, \dots \xi_\nu$ und A, B ein Paar linearer Operationen für (F), (G), welches den Bedingungen $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$, $\mathsf{B}(G) \leqq (F)$ genügt. Eine Zusammenstellung $k, F(x), G(\xi)$ einer von 0 verschiedenen Konstanten und zweier von 0 verschiedenen Funktionen aus (F), (G), welche das Gleichungssystem

$$\begin{cases} kG(\xi) = \mathsf{A}F(x) \\ kF(x) = \mathsf{B}G(\xi) \end{cases} \tag{82.}$$

erfüllen, heißt ein Eigentripel des Paares A, B. Gehören $F(x)$, $G(\xi)$ einem Eigentripel an, so heißen sie *zusammengehörige Eigenfunktionen von* A, B; sie gehören dann nur einem Eigentripel an, und dessen k heißt *der ihnen zugehörige Eigenwert von* A, B. Da neben $k, F(x), G(\xi)$ auch $-k, F(x), -G(\xi)$ ein Eigentripel ist, so bieten neben den zu k gehörigen Eigenfunktionen die zu $-k$ gehörigen kein Interesse mehr. Aus (82.) ist ersichtlich, daß in einem Eigentripel stets $F(x)$ zu $\mathsf{B}(G)$, $G(\xi)$ zu $\mathsf{A}(F)$ gehört. Aus (82.) folgt

$$k^2 F(x) = \mathsf{R}F(x), \qquad k^2 G(\xi) = \mathsf{S}G(\xi),$$

wenn $\mathsf{R} = \mathsf{BA}$, $\mathsf{S} = \mathsf{AB}$ gesetzt wird. Genügen umgekehrt die von 0 verschiedene Konstante k^* und die von 0 verschiedene Funktion $F(x)$ aus (F) der Gleichung $k^* F(x) = \mathsf{R}F(x)$, so gehört $F(x)$ zwei und nur zwei Eigentripeln an, deren k die Quadratwurzeln aus k^* und deren $G(\xi)$ aus der ersten der Gleichungen (82.) zu bestimmen sind. Mehrere zu (F) gehörige Eigenfunktionen von A, B, deren Eigenwerte verschiedene Quadrate haben, sind linearunabhängig; m. a. W. wenn $k_1, \dots k_\tau$ solche Eigenwerte von A, B sind, daß $k_1^2, \dots k_\tau^2$ verschieden sind, und (M_α) diejenige Schar ist, welche aus allen zu (F) gehörigen Eigenfunktionen von A, B zum Eigenwert k_α und aus der Funktion 0 besteht, so kann eine Gleichung $M_1(x) + \dots + M_\tau(x) = 0$, in der $M_\alpha(x)$ zu (M_α) gehört, nur so bestehen, daß alle $M_\alpha(x) = 0$ sind; aus dieser Gleichung folgt nämlich

durch Anwendung der Operationen $\mathsf{R}^0, \mathsf{R}, \ldots \mathsf{R}^{\tau-1}$ das Gleichungssystem $k_1^{2p} M_1(x) + \cdots + k_\tau^{2p} M_\tau(x) = 0$ für $p = 0, 1, \ldots \tau - 1$. Entsprechendes gilt für die zu (G) gehörigen Eigenfunktionen.

II. Das Paar A, B heißt ein *Einzelpaar*, wenn die Relationen

$$\mathsf{BAB} = \mathsf{B}, \qquad \mathsf{ABA} = \mathsf{A} \tag{83.}$$

bestehen. Diese Relationen, die man auch $\mathsf{RB} = \mathsf{B}, \mathsf{SA} = \mathsf{A}$ schreiben kann, besagen, daß für Funktionen $M(x)$, $N(\xi)$ aus $\mathsf{B}(G)$, $\mathsf{A}(F)$ stets

$$M(x) = \mathsf{R}M(x), \qquad N(\xi) = \mathsf{S}N(\xi)$$

ist, also R auf $\mathsf{B}(G)$, S auf $\mathsf{A}(F)$ je die Wirkung $\{1\}$ haben. Daher kann man für ein von $\{0\}, \{0\}$ verschiedenes Paar A, B die Eigenschaften (83.) dahin aussprechen, daß weder $\mathsf{A} = \{0\}$ noch $\mathsf{B} = \{0\}$ ist und sowohl jede von 0 verschiedene Funktion aus $\mathsf{B}(G)$ als auch jede von 0 verschiedene Funktion aus $\mathsf{A}(F)$ eine Eigenfunktion von A, B zum Eigenwert 1 bildet; m. a. W. daß für Funktionen $M(x), N(\xi)$ aus $\mathsf{B}(G), \mathsf{A}(F)$ die beiden Gleichungen

$$N(\xi) = \mathsf{A}M(x),$$
$$M(x) = \mathsf{B}N(\xi)$$

gegenseitig aus einander folgen. Ein Einzelpaar ist also ein ausgezeichnetes Paar von der Besonderheit, daß die beiden in Satz 2. erörterten Abbildungen zusammenfallen*). —

Zwei Paare $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1$ und $\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2$ von linearen Operationen für (F), (G), welche den Bedingungen $\mathsf{A}_\alpha(F) \leqq (G)$, $\mathsf{B}_\alpha(G) \leqq (F)$ genügen, heißen *getrennt*, wenn die vier Relationen

$$\mathsf{B}_\beta \mathsf{A}_\alpha = \{0\}, \ \mathsf{A}_\alpha \mathsf{B}_\beta = \{0\} \quad \text{für } \alpha \neq \beta \tag{84.}$$

gelten. Diesen Relationen kann man auch die Gestalt

$$\mathsf{A}_\alpha(F) \leqq (G)_{\mathsf{B}_\beta}, \ \mathsf{B}_\beta(G) \leqq (F)_{\mathsf{A}_\alpha} \quad \text{für } \alpha \neq \beta \tag{84'.}$$

geben. Betrachtet man nun speziell ausgezeichnete Paare, so erkennt man leicht die Richtigkeit des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz. Es seien $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1; \ldots \mathsf{A}_\tau, \mathsf{B}_\tau$ ausgezeichnete Paare für (F), (G) und im Falle $\tau > 1$ paarweise getrennt. Wir bezeichnen mit (Φ) die Gesamtheit der allen $(F)_{\mathsf{A}_\alpha}$ gemeinsamen Funktionen, mit (Ψ) die Ge-

*) Werden die in § 2. mit r_2, s_2 bezeichneten Eigenschaften vorausgesetzt, so folgt aus einer der Relationen (83.) die andere.

samtheit der allen $(G)_{\mathsf{B}_\alpha}$ gemeinsamen Funktionen. Dann läßt sich jede $F(x)$ aus (F) und jede $G(\xi)$ aus (G) auf eine und nur eine Weise in

$$(85.) \qquad F(x) = M_1(x) + \cdots + M_\tau(x) + \Phi(x),$$

$$(86.) \qquad G(\xi) = N_1(\xi) + \cdots + N_\tau(\xi) + \Psi(\xi)$$

mit Funktionen $M_\alpha(x)$, $N_\alpha(\xi)$, $\Phi(x)$, $\Psi(\xi)$ aus bzw. $\mathsf{B}_\alpha(G)$, $\mathsf{A}_\alpha(F)$, (Φ), (Ψ) zerlegen. In diesen Darstellungen sind die Funktionen von $(F)_{\mathsf{A}_\alpha}$, $(G)_{\mathsf{B}_\alpha}$ durch das Verschwinden des Bestandteiles $M_\alpha(x)$, $N_\alpha(\xi)$ gekennzeichnet. Bildet man nun mit von 0 verschiedenen Konstanten k_α, h_α die Operationen

$$(87.) \qquad \mathsf{A} = k_1 \mathsf{A}_1 + \cdots + k_\tau \mathsf{A}_\tau, \qquad \mathsf{B} = h_1 \mathsf{B}_1 + \cdots + h_\tau \mathsf{B}_\tau,$$

so ist A, B ein ausgezeichnetes Paar für (F), (G) und $(F)_{\mathsf{A}} = (\Phi)$, $(G)_{\mathsf{B}} = (\Psi)$, $\mathsf{B}(G)$ die kleinste $\mathsf{B}_1(G), \ldots \mathsf{B}_\tau(G)$ umfassende Schar, $\mathsf{A}(F)$ die kleinste $\mathsf{A}_1(F), \ldots \mathsf{A}_\tau(F)$ umfassende Schar. Ferner kann man aus den Operationen A, B, den Scharen $\mathsf{B}_\alpha(G)$, $\mathsf{A}_\alpha(F)$ und den Konstanten k_α, h_α die Operationen A_α, B_α zurückkonstruieren, da für die Zerlegungen (85.), (86.), zu deren Herstellung wegen $(\Phi) = (F)_{\mathsf{A}}$, $(\Psi) = (G)_{\mathsf{B}}$ die angeführten Daten ausreichen,

$$\mathsf{A}_\alpha F(x) = \frac{1}{k_\alpha} \mathsf{A}\, M_\alpha(x), \qquad \mathsf{B}_\alpha G(\xi) = \frac{1}{h_\alpha} \mathsf{B} N_\alpha(\xi)$$

ist. Setzt man endlich $\mathsf{R}_\alpha = \mathsf{B}_\alpha \mathsf{A}_\alpha$, $\mathsf{S}_\alpha = \mathsf{A}_\alpha \mathsf{B}_\alpha$, so werden $\mathsf{R} = \mathsf{BA}$, $\mathsf{S} = \mathsf{AB}$ durch

$$\mathsf{R} = k_1 h_1 \mathsf{R}_1 + \cdots + k_\tau h_\tau \mathsf{R}_\tau, \qquad \mathsf{S} = k_1 h_1 \mathsf{S}_1 + \cdots + k_\tau h_\tau \mathsf{S}_\tau$$

gegeben. —

Wir betrachten nun den speziellen Fall, daß die A_α, B_α Einzelpaare sind.

Definition. Das Paar A, B heißt *zerlegbar*, wenn es eine Darstellung

$$(88.) \qquad \begin{cases} \mathsf{A} = k_1 \mathsf{A}_1 + \cdots + k_\tau \mathsf{A}_\tau \\ \mathsf{B} = k_1 \mathsf{B}_1 + \cdots + k_\tau \mathsf{B}_\tau \end{cases}$$

gibt, in der die $\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{B}_\alpha$ von $\{0\}, \{0\}$ verschiedene Einzelpaare, die k_α von 0 verschiedene Konstanten und im Falle $\tau > 1$ die Einzelpaare paarweise getrennt, die Größen $k_1^2, \ldots k_\tau^2$ verschieden sind*). Eine solche Darstellung (88.) nennen wir eine *Zerlegung* von A, B.

---

*) Wenn A, B eine Darstellung (87.) besitzt, in welcher die k_α, h_α von 0 verschiedene Konstanten, die $\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{B}_\alpha$ von 0 verschiedene Einzelpaare und im Falle $\tau > 1$ paarweise getrennt sind, so ist A, B zerlegbar.

Diese Benennungen gebrauchen wir also auch im Falle $\tau = 1$. Wir fragen nun unter Annahme der Zerlegung (88.) nach den Eigenfunktionen von A, B und gewinnen, indem wir (85.), (86.) in (82.) eintragen, den Satz:

Satz 32. Liegt für das zerlegbare Paar A, B die Zerlegung (88.) vor, so sind die einzigen Eigenwerte von A, B die 2τ Werte k_α und $-k_\alpha$, und die Paare zusammengehöriger Eigenfunktionen von A, B zum Eigenwert k_α sind mit den Paaren zusammengehöriger Eigenfunktionen von $\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{B}_\alpha$ zum Eigenwert 1 identisch. Daher sind die Konstanten k_α^2 und die Scharen $\mathsf{B}_\alpha(G), \mathsf{A}_\alpha(F)$ durch A, B selbst bestimmt; nach Auswahl der Quadratwurzeln k_α aus den Größen k_α^2 sind daher auch die Operationen $\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{B}_\alpha$ durch A, B selbst bestimmt. Abgesehen von der Auswahl der Quadratwurzeln, die beliebig vorgenommen werden kann, besitzt also ein zerlegbares Paar *nur eine einzige Zerlegung.*

Dabei gilt für jede Funktion $M_\alpha(x)$ aus $\mathsf{B}_\alpha(G)$ die Gleichung $k_\alpha^2 M_\alpha(x) = \mathsf{R} M_\alpha(x)$ und daher auch, wenn $\varphi(\lambda)$ eine ganze rationale Funktion einer Variablen λ mit konstanten Koeffizienten bedeutet, die Gleichung $\varphi(k_\alpha^2) M_\alpha(x) = \varphi(\mathsf{R}) M_\alpha(x)$. Will man daher $\varphi(\lambda)$ so bestimmen, daß für alle Funktionen $M(x)$ aus $\mathsf{B}(G)$ die Gleichung $\varphi(\mathsf{R}) M(x) = 0$ besteht, so hat man die Bedingungen $\varphi(k_1^2) = 0, \ldots \varphi(k_\tau^2) = 0$ zu erfüllen. Daher besteht der Satz:

Satz 32*. Liegt für das zerlegbare Paar A, B die Zerlegung (88.) vor, so genügt jede Funktion $M(x)$ aus $\mathsf{B}(G)$ der Gleichung

$$\left(\{1\} - \frac{1}{k_1^2}\mathsf{R}\right) \ldots \left(\{1\} - \frac{1}{k_\tau^2}\mathsf{R}\right) M(x) = 0,$$

hingegen gibt es keine für alle $M(x)$ aus $\mathsf{B}(G)$ erfüllte Gleichung $\varphi(\mathsf{R}) M(x) = 0$, in der $\varphi(\lambda)$ eine ganze rationale Funktion der Variablen λ von einem Grade $< \tau$ wäre. Entsprechendes gilt für $\mathsf{A}(F)$ und S.

Wir wollen nun ein Kriterium für die Zerlegbarkeit aufstellen.

Satz 33. Damit das Paar A, B zerlegbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß es folgende Eigenschaften besitzt: es ist ein ausgezeichnetes Paar; es besitzt mindestens einen Eigenwert und nur eine endliche Anzahl solcher; die kleinste alle zu (F) gehörigen Eigenfunktionen umfassende Schar ist mit $\mathsf{B}(G)$ identisch; die kleinste alle zu (G) gehörigen Eigenfunktionen umfassende Schar ist mit $\mathsf{A}(F)$ identisch*).

*) Von diesen vier Eigenschaften folgt aus der ersten und dritten die vierte.

Daß die Bedingungen notwendig sind, erhellt aus dem Hilfssatze und dem Satze 32; nach diesem und nach dem Begriff des Einzelpaares sind nämlich die zu (F) gehörigen Eigenfunktionen von A, B zum Eigenwert k_α identisch mit den von 0 verschiedenen Funktionen von $\mathsf{B}_\alpha(G)$.

Sind umgekehrt die Bedingungen erfüllt, so seien $\pm k_1, \dots \pm k_\tau$ die sämtlichen Eigenwerte von A, B, ferner (M_α) die Schar, welche aus allen zu (F) gehörigen Eigenfunktionen von A, B zum Eigenwert k_α und aus der Funktion 0 besteht, und (N_α) diejenige Schar, welche aus allen zu (G) gehörigen Eigenfunktionen von A, B zum Eigenwert k_α und aus der Funktion 0 besteht. Nach den Voraussetzungen läßt sich jede Funktion $F(x)$, $G(\xi)$ aus (F), (G) in

$$F(x) = M_1(x) + \cdots + M_\tau(x) + \Phi(x),$$
$$G(\xi) = N_1(\xi) + \cdots + N_\tau(\xi) + \Psi(\xi)$$

mit Funktionen $M_\alpha(x)$, $N_\alpha(\xi)$, $\Phi(x)$, $\Psi(\xi)$ aus (M_α), (N_α), $(F)_\mathsf{A}$, $(G)_\mathsf{B}$ zerlegen, und nach der Schlußbemerkung in Abschnitt I. dieses § ist diese Zerlegung nur auf eine Weise möglich. Wir definieren jetzt Operationen $\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{B}_\alpha$ für (F), (G) durch die Festsetzung, daß für die vorstehenden Zerlegungen der Funktionen $F(x)$, $G(\xi)$

$$\mathsf{A}_\alpha F(x) = \frac{1}{k_\alpha}\,\mathsf{A} M_\alpha(x), \qquad \mathsf{B}_\alpha G(\xi) = \frac{1}{k_\alpha}\,\mathsf{B} N_\alpha(\xi)$$

sein soll. Dann bestehen die Gleichungen (88.), (84.) und $\mathsf{B}_\alpha \mathsf{A}_\alpha \mathsf{B}_\alpha = \mathsf{B}_\alpha, \mathsf{A}_\alpha \mathsf{B}_\alpha \mathsf{A}_\alpha = \mathsf{A}_\alpha$. Daher ist A, B zerlegbar.

III. Wir wollen nun unter gewissen Voraussetzungen die Existenz und endliche Anzahl der Eigenwerte beweisen*).

Es sei A, B ein von $\{0\}$, $\{0\}$ verschiedenes ausgezeichnetes Paar *endlicher* Operationen. Dann gibt es nach § 2 IV. solche Konstanten $a_1, \dots a_r$, daß für jede Funktion $M(x)$ aus $\mathsf{B}(G)$ die Gleichung

$$(19.) \qquad M(x) = (a_1 \mathsf{R} + \cdots + a_r \mathsf{R}^r) M(x)$$

oder, wenn man mit einer Variablen λ

$$\varphi(\lambda) = 1 - a_1 \lambda - \cdots - a_r \lambda^r$$

setzt, die Gleichung

$$\varphi(\mathsf{R})\, M(x) = 0$$

---

*) Vgl. die von *Weyr* und *Pincherle* gegebene Darstellung der Elementarteilertheorie.

besteht. Fordern wir, daß r möglichst klein sei, so sind $a_1, \dots a_r$ völlig bestimmt und $a_r \neq 0$. Wir setzen nun

$$\varphi(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{k_1^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda}{k_r^2}\right)$$

mit von 0 verschiedenen Konstanten k_α und denken uns dabei die Bezeichnung so gewählt, daß $k_1^2, \dots k_\tau^2$ die *verschiedenen* unter den r Größen k_α^2 sind.

Satz 34. Unter den vorstehenden Voraussetzungen und Bezeichnungen hat A, B die 2τ Eigenwerte $\pm k_1, \dots \pm k_\tau$, und nur diese.

Setzt man nämlich $\varphi(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{k_\alpha^2}\right) \varphi_\alpha(\lambda)$, so kann die Gleichung $\varphi(\mathsf{R})\, M(x) = 0$ geschrieben werden:

$$k_\alpha^2\, M'(x) = \mathsf{R}\, M'(x) \text{ für } M'(x) = \varphi_\alpha(\mathsf{R})\, M(x);$$

da nun in (19.) r den kleinstmöglichen Wert hat, so gibt es wenigstens eine Funktion $M(x)$ aus $\mathsf{B}(G)$, für welche $\varphi_\alpha(\mathsf{R})\, M(x) \neq 0$ ist, und für diese ist dann $M'(x)$ eine zu $\pm k_\alpha$ gehörige Eigenfunktion. Wäre dagegen $M(x)$ eine Eigenfunktion zu einem von sämtlichen $\pm k_\alpha$ verschiedenen Eigenwert k, so wären die ganzen rationalen Funktionen $1 - \frac{\lambda}{k^2}$ und $\varphi(\lambda)$ der Variablen λ teilerfremd, es gäbe also solche ganze rationale Funktionen $\psi(\lambda), \chi(\lambda)$, daß $\psi(\lambda)\left(1 - \frac{\lambda}{k^2}\right) + \chi(\lambda)\, \varphi(\lambda) = 1$ wäre, und wegen $\left(\{1\} - \frac{1}{k^2}\mathsf{R}\right) M(x) = 0$ und $\varphi(\mathsf{R})\, M(x) = 0$ hätte man daher auch $\{1\}\, M(x) = 0$, während $M(x)$ doch als Eigenfunktion von 0 verschieden sein müßte. Damit ist Satz 34 bewiesen*); als Folgerung ergibt sich:

---

*) Die Betrachtungen des Abschnitts III. lassen sich dahin verallgemeinern, daß man für das ausgezeichnete von $\{0\}, \{0\}$ verschiedene Paar A, B die Annahme der Endlichkeit fallen läßt, dafür aber die Existenz einer solchen von 0 verschiedenen ganzen rationalen Funktion $\varphi(\lambda)$ voraussetzt, daß für alle $M(x)$ aus $\mathsf{B}(G)$ die Gleichung $\varphi(\mathsf{R})\, M(x) = 0$ besteht. Daraus folgt noch $\varphi(\mathsf{S})\, N(\xi) = 0$ für alle $N(\xi)$ aus $\mathsf{A}(F)$. Unter allen solchen $\varphi(\lambda)$ gibt es eine und nur eine, welche Teiler aller übrigen ist und in der $\varphi(0) = 1$ ist, sie heiße die einfachste. Für sie gilt Satz 34. (Wird dagegen für ein von $\{0\}, \{0\}$ verschiedenes, $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$ und $\mathsf{B}(G) \leqq (F)$ erfüllendes, Paar A, B vorausgesetzt, daß $\varphi_1(\mathsf{R})\, M(x) = 0$, $\varphi_2(\mathsf{S})\, N(\xi) = 0$ für alle $M(x)$, $N(\xi)$ aus $\mathsf{B}(G)$, $\mathsf{A}(F)$ und dabei $\varphi_1(0) \neq 0$, $\varphi_2(0) \neq 0$ ist, so kann man folgern, daß A, B ein ausgezeichnetes Paar ist.)

Befindet sich nun speziell unter den genannten $\varphi(\lambda)$ eine mit nur *einfachen* Nullstellen, woraus dann folgt, daß auch die einfachste $\varphi(\lambda)$ nur einfache Nullstellen

Satz 34*. Jedes von $\{0\}, \{0\}$ verschiedene *ausgezeichnete* Paar *endlicher* Operationen besitzt mindestens einen Eigenwert und nur eine endliche Anzahl solcher.

IV. Es sei A, B ein den Bedingungen $\mathsf{A}(F) \leqq (G), \mathsf{B}(G) \leqq (F)$ genügendes Paar von linearen Operationen für $(F), (G)$.

Satz 35. Wenn es Faltungen $\cdot, \cdot\cdot$ der Scharen $(F), (G)$ gibt, für welche A, B ein *reziprokes* Paar ist, so sind die Eigenwerte von A, B, wenn überhaupt vorhanden, *reell*.

Denn aus (82.) folgt nach (24.) $k\,\bar{F}(\cdot)\,F(\cdot) = \bar{k}\,\bar{G}(\cdot\cdot)\,G(\cdot\cdot)$ und daraus wegen (21.) das Reellsein von k.

Satz 36. Sind $k, F(x), G(\xi)$ und $k', F'(x), G'(\xi)$ Eigentripel des in bezug auf die Faltungen $\cdot, \cdot\cdot$ reziproken Paares A, B, so ist

im Falle $k = k'$: $\quad \bar{F}(\cdot)\,F'(\cdot) = \bar{G}(\cdot\cdot)\,G'(\cdot\cdot)$,

im Falle $k^2 \neq k'^2$: $\quad \bar{F}(\cdot)\,F'(\cdot) = 0, \bar{G}(\cdot\cdot)\,G'(\cdot\cdot) = 0$.

Denn vermöge (24.) bestehen die beiden Gleichungen $k'\,\bar{F}(\cdot)\,F'(\cdot) = k\,\bar{G}(\cdot\cdot)\,G'(\cdot\cdot)$, $k\,\bar{F}(\cdot)\,F'(\cdot) = k'\,\bar{G}(\cdot\cdot)\,G'(\cdot\cdot)$.

Es seien nun einerseits ein *zerlegbares* Paar A, B für $(F), (G)$ mit der *Zerlegung* (88.), anderseits Faltungen $.,..$ für $(F), (G)$ gegeben. Dann erkennt man auf Grund der Sätze 35 und 36 die Richtigkeit der beiden folgenden Aussagen. Damit A, B ein reziprokes Paar ist, ist notwendig und hinreichend, daß die $\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{B}_\alpha$ reziproke Paare und die k_α reell sind. Damit die $\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{B}_\alpha$ reziproke Paare sind, ist notwendig und hinreichend, daß die Scharen $\mathsf{B}_1(G), \ldots \mathsf{B}_\tau(G), (F)_\mathsf{A}$ paarweise orthogonal für $\cdot$, die Scharen $\mathsf{A}_1(F), \ldots \mathsf{A}_\tau(F), (G)_\mathsf{B}$ paarweise orthogonal für $\cdot\cdot$ und die Faltung von Funktionen $N_\alpha(\xi), N'_\alpha(\xi)$ aus $\mathsf{A}_\alpha(F)$ durch $\bar{N}_\alpha(\cdot\cdot)\,N'_\alpha(\cdot\cdot) = \bar{M}_\alpha(\cdot)\,M'_\alpha(\cdot)$ bestimmt ist, worin $M_\alpha(x), M'_\alpha(x)$ die zu $N_\alpha(\xi), N'_\alpha(\xi)$ zugehörigen Eigenfunktionen von A, B zum Eigenwert k_α und also Funktionen aus $\mathsf{B}_\alpha(G)$ bedeuten*). Aus diesen Aussagen läßt sich nun folgern:

---

hat (in obiger Bezeichnung $r = \tau$), so ist das Paar A, B *zerlegbar*. Denn zu den obigen $\varphi_\alpha(\lambda)$ gibt es dann solche ganze rationale $\psi_\alpha(\lambda)$, daß $1 = \psi_1(\lambda)\,\varphi_1(\lambda) + \cdots + \psi_\tau(\lambda)\,\varphi_\tau(\lambda)$, also $M(x) = M_1(x) + \cdots + M_\tau(x)$ mit $M_\alpha(x) = \psi_\alpha(\mathsf{R})\,\varphi_\alpha(\mathsf{R})\,M(x)$, ist, und für $M(x)$ aus $\mathsf{B}(G)$ ist hierin $M_\alpha(x)$ Eigenfunktion oder 0, sodaß man Satz 33 anwenden kann. Vermöge dieser Umkehrung des Satzes 32* gewinnt man eine zweite Definition des Begriffs des zerlegbaren Paares (vgl. Theorie der Elementarteiler).

*) Diese zweite Aussage wird, wenn man statt von $(F)_\mathsf{A}, (G)_\mathsf{B}$ von den $(\Phi), (\Psi)$

Satz 37. Zu jedem *zerlegbaren* Paare mit *reellen* Eigenwerten gibt es Faltungen, in bezug auf die es *reziprok* ist.

Um nämlich diesen Satz zu beweisen und diese Faltungen in allgemeinster Weise zu konstruieren, setze man, wenn für das zerlegbare Paar A, B mit reellen Eigenwerten die Zerlegung (88.) vorliegt, zunächst in jeder der $\tau + 2$ Scharen $\mathsf{B}_1(G), \ldots \mathsf{B}_\tau(G), (F)_\mathsf{A}; (G)_\mathsf{B}$ eine beliebige Faltung fest; dann läßt sich auf eine und nur eine Art die Festsetzung der Faltungen so auf die ganzen Scharen $(F), (G)$ ausdehnen, daß die in der zweiten der vorangeschickten Aussagen aufgeführten Bedingungen dafür, daß die $\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{B}_\alpha$ reziproke Paare werden, erfüllt sind; nach der ersten der vorangeschickten Aussagen ist dann auch A, B ein reziprokes Paar.

V. Der wichtigste Satz dieses § ist der folgende:

Satz 38. Es sei A, B ein solches von $|0|$, $|0|$ verschiedenes Paar von *endlichen* linearen Operationen für (F), (G), daß es Faltungen für (F), (G) gibt, für welche A, B ein *reziprokes* Paar bilden. Dann ist A, B *zerlegbar*.

Beweis. Nach Satz 15 ist A, B ein ausgezeichnetes Paar, nach Satz 34* besitzt es also mindestens einen Eigenwert und nur eine endliche Anzahl solcher, nach Satz 35 sind sie reell.

Nun seien $\cdot, \cdot\cdot$ Faltungen für (F), (G), für welche A, B ein reziprokes Paar wird. Wir bezeichnen mit (M_0) die Gesamtheit aller derjenigen Funktionen aus $\mathsf{B}(G)$, welche in bezug auf $\cdot$ zu allen zu (F) gehörigen Eigenfunktionen von A, B orthogonal sind, und mit (N_0) die Gesamtheit aller derjenigen Funktionen aus $\mathsf{A}(F)$, welche in bezug auf $\cdot\cdot$ zu allen zu (G) gehörigen Eigenfunktionen von A, B orthogonal sind. Dann behaupten wir die beiden Relationen

$$(89.) \qquad \mathsf{A}(M_0) = (N_0), \qquad \mathsf{B}(N_0) = (M_0).$$

Wir beweisen zunächst, daß $\mathsf{A}(M_0) \leqq (N_0)$ ist. Ist nämlich $M_0(x)$ eine Funktion aus (M_0) und wird die Funktion $\mathsf{A}M_0(x)$ mit $N(\xi)$ bezeichnet, ist ferner $k, F(x), G(\xi)$ irgend ein Eigentripel von A, B, so hat man die Gleichungen

---

des Hilfssatzes spricht, eine bloße Aussage über paarweise getrennte Einzelpaare. Die k_a und A, B sind dann nur als Hilfsmittel für den Beweis eingeführt und können vermieden werden, indem man (84′.) und Satz 14 benützt.

$$\begin{cases} N(\xi) = \mathsf{A}M_0(x), \\ k\,F(x) = \mathsf{B}G(\xi), \end{cases}$$

aus denen nach (24.) $k\,\overline{M}_0(\cdot)\,F(\cdot) = \overline{N}(\cdot\cdot)\,G(\cdot\cdot)$ folgt. Da nun die linke Seite dieser Gleichung $= 0$ ist, so auch die rechte, d. h. $N(\xi)$ gehört zu (N_0). Also ist $\mathsf{A}(M_0) \leqq (N_0)$; entsprechend findet man $\mathsf{B}(N_0) \leqq (M_0)$. Daher ist $\mathsf{BA}(M_0) \leqq \mathsf{B}(N_0) \leqq (M_0)$, also wegen Satz 5 $\mathsf{BA}(M_0) = (M_0)$ und daher $\mathsf{B}(N_0) = (M_0)$; entsprechend findet man $\mathsf{A}(M_0) = (N_0)$.

Ist nun (Φ_0) die Gesamtheit aller zu der Schar (M_0) orthogonalen Funktionen aus (F), (Ψ_0) die Gesamtheit aller zu der Schar (N_0) orthogonalen Funktionen aus (G), so kann man jede Funktion $F(x)$, $G(\xi)$ aus (F), (G) auf eine und nur eine Weise in

$$F(x) = M_0(x) + \Phi_0(x), \qquad G(\xi) = N_0(\xi) + \Psi_0(\xi)$$

mit Funktionen $M_0(x)$, $N_0(\xi)$, $\Phi_0(x)$, $\Psi_0(\xi)$ aus (M_0), (N_0), (Φ_0), (Ψ_0) zerlegen, und wir definieren lineare Operationen $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0$ für (F), (G) durch die Festsetzung, daß für die vorstehende Zerlegung der Funktionen $F(x)$, $G(\xi)$

$$\mathsf{A}_0 F(x) = \mathsf{A}M_0(x), \qquad \mathsf{B}_0 G(\xi) = \mathsf{B}N_0(\xi)$$

sein soll. Dann ist wegen (89.)

$$(90.) \qquad \mathsf{A}_0(F) = (N_0), \qquad \mathsf{B}_0(G) = (M_0),$$

ferner ist $(F)_{\mathsf{A}_0} = (\Phi_0)$, $(G)_{\mathsf{B}_0} = (\Psi_0)$, und es ist daher nach Satz 3 $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0$ ein *ausgezeichnetes* Paar. Wir fragen nach Eigenfunktionen von $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0$; da dieselben nach (90.) zu (M_0), (N_0) gehören müßten, auf diese Scharen aber $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0$ dieselbe Wirkung haben wie A, B selbst, so müßten sie zugleich Eigenfunktionen von A, B selbst sein; dies ist aber unmöglich, weil sie als Funktionen von (M_0), (N_0) zu allen zu (F), (G) gehörigen Eigenfunktionen von A, B orthogonal sein müßten; das Paar $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0$ besitzt also *keine* Eigenfunktionen. Da ferner $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0$ endlich sind, so folgt aus Satz 34*, daß $\mathsf{A}_0 = \{0\}$, $\mathsf{B}_0 = \{0\}$ ist.

Nach (90.) bestehen daher die Scharen (M_0), (N_0) nur aus der Funktion 0. Daher ist die kleinste alle zu (F) gehörigen Eigenfunktionen von A, B umfassende Schar, die ja ihrer Endlichkeit wegen zu (M_0) in $\mathsf{B}(G)$ komplementär ist, mit $\mathsf{B}(G)$ identisch. Ebenso ist die kleinste alle zu (G) gehörigen Eigenfunktionen von A, B umfassende Schar mit $\mathsf{A}(F)$ identisch.

Nach Satz 33 ist daher A, B zerlegbar. *Damit ist Satz* 38 *bewiesen**).

Aus den Sätzen 38 und 32* ergibt sich noch:

Satz 38*. Es sei ein von $\{0\}, \{0\}$ verschiedenes Paar A, B von *endlichen* linearen Operationen für $(F), (G)$ gegeben. Wenn es Faltungen gibt, für welche A, B ein *reziprokes* Paar bilden, so besteht für jede Funktion $M(x)$ aus $\mathsf{B}(G)$ die Gleichung

$$\left(\{1\} - \frac{1}{k_1^2}\,\mathsf{R}\right)\cdots\left(\{1\} - \frac{1}{k_\tau^2}\,\mathsf{R}\right)M(x) = 0,$$

worin $k_1, \ldots k_\tau$ die positiven Eigenwerte des Paares A, B sind.

Endlich erhalten wir aus den Sätzen 37 und 35, 38 folgenden Aufschluß über das Wesen eines reziproken Paares endlicher Operationen:

Satz 39. Es sei A, B ein von $\{0\}, \{0\}$ verschiedenes Paar *endlicher* linearer Operationen für $(F), (G)$, die den Bedingungen $\mathsf{A}(F) \leqq (G)$, $\mathsf{B}(G) \leqq (F)$ genügen. Damit es Faltungen für $(F), (G)$ gibt, für die A, B ein reziprokes Paar bilden, ist notwendig und hinreichend, daß das Paar A, B zerlegbar ist und reelle Eigenwerte hat.

---

*) Zum Zwecke des Vergleichs mit der transzendenten Beweisführung in der Dissertation von *E. Schmidt* will ich von der vorstehenden algebraischen Beweisführung noch folgende Modifikation erwähnen. Man verstehe unter (Φ^*) die Gesamtheit aller derjenigen Funktionen aus (F), welche zu allen zu (F) gehörigen Eigenfunktionen von A, B in bezug auf $\cdot$ orthogonal sind, und erkläre (Ψ^*) entsprechend für (G) und $\cdot\cdot$. Nun definiere man die Operationen $\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{B}_\alpha$ für $(F), (G)$ ähnlich wie im zweiten Teile des Beweises für Satz 33, jedoch mit der Abänderung, daß man in den Zerlegungen der Funktionen $F(x), G(\xi)$ unter $\Phi(x), \Psi(\xi)$ diesmal Funktionen aus $(\Phi^*), (\Psi^*)$ versteht. Man zeigt wie dort, daß diese $\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{B}_\alpha$ Einzelpaare und im Falle $\tau > 1$ paarweise getrennt sind. Ferner aber zeigt man leicht, daß $\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{B}_\alpha$ für $\cdot, \cdot\cdot$ ein *reziprokes* Paar bilden. (Daher könnte das Getrenntsein auch aus den Sätzen 36, 40 entnommen werden.) Da nun auch A, B ein reziprokes Paar bilden und die k_α reell sind, so bilden auch die Operationen

$$\mathsf{A}_0 = \mathsf{A} - k_1\mathsf{A}_1 - \cdots - k_\tau\mathsf{A}_\tau, \qquad \mathsf{B}_0 = \mathsf{B} - k_1\mathsf{B}_1 - \cdots - k_\tau\mathsf{B}_\tau$$

ein *reziprokes* Paar. Nach Satz 15 ist daher $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0$ ein *ausgezeichnetes* Paar. Indem man, ähnlich wie oben (89.) gezeigt wurde, die Relationen $\mathsf{A}(\Phi^*) \leqq (\Psi^*)$, $\mathsf{B}(\Psi^*) \leqq (\Phi^*)$ beweist, erkennt man, daß $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0$ keine Eigenwerte besitzt. Nach Satz 34* ist also $\mathsf{A}_0 = \{0\}$, $\mathsf{B}_0 = \{0\}$, also $\mathsf{A} = k_1\mathsf{A}_1 + \cdots + k_\tau\mathsf{A}_\tau$, $\mathsf{B} = k_1\mathsf{B}_1 + \cdots + k_\tau\mathsf{B}_\tau$. — Dieser Beweisgang liegt besonders dann nahe, wenn man statt der linearen Operationen ihre Kerne behandelt. Er entspricht dann derjenigen Modifikation des transzendenten Beweises, in welcher, nachdem die Existenz der Eigenwerte bewiesen ist, der unsymmetrische Kern nicht auf den symmetrischen zurückgeführt, sondern direkt nach derjenigen Methode behandelt wird, die *E. Schmidt* für den symmetrischen verwendet.

VI. Wir wollen noch die Zerlegung reziproker Paare endlicher Operationen auf ihre Kerne übertragen. Hierzu schicken wir folgende Bemerkung voraus:

Satz 40. Es seien A_1, B_1 und A_2, B_2 zwei *reziproke* Paare *endlicher* Operationen für (F), (G) in bezug auf die Faltungen $\cdot, \cdot\cdot$. Damit diese Paare getrennt sind, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathsf{B}_1(G)$ und $\mathsf{B}_2(G)$ orthogonal für $\cdot$, $\mathsf{A}_1(F)$ und $\mathsf{A}_2(F)$ orthogonal für $\cdot\cdot$ sind.

Denn diese Bedingungen sind nach Satz 16 mit (84′.) gleichbedeutend.

Nun stellen wir folgende Definitionen auf, welche sich auf gegebene Faltungen $\cdot, \cdot\cdot$ von $(F), (G)$ beziehen.

Eine zweireihige Funktion $A(\xi; x)$ über $(F), \overline{(G)}$ heißt ein *Einzelkern*, wenn die Gleichung

$$A(\cdot\cdot; x)\,\bar{A}(\cdot\cdot; \cdot)\,A(\xi; \cdot) = A(\xi; x) \tag{91.}$$

besteht. Dies ist gleichbedeutend damit, daß das reziproke Paar A, B, dessen A aus dem Kerne $A(\xi; x)$ entsteht, ein Einzelpaar ist. Denn die Gleichung ist mit der ersten und wegen Satz 11 auch mit der zweiten der Relationen (83.) gleichbedeutend*).

Zwei zweireihige Funktionen $A_1(\xi; x)$ und $A_2(\xi; x)$ über $(F), \overline{(G)}$ heißen *orthogonal*, wenn ihre x-Scharen orthogonal und ihre ξ-Scharen orthogonal sind. Nach Satz 40 ist dies gleichbedeutend damit, daß die reziproken Paare $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1$ und $\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2$, deren A_1 und A_2 aus diesen Kernen entstehen, getrennt sind. Aus der ersten Fassung der Definition erkennt man, daß die Orthogonalität auch durch das Bestehen der beiden Gleichungen

$$A_1(\cdot\cdot; x)\,\bar{A}_2(\cdot\cdot; y) = 0, \qquad \bar{A}_1(\xi; \cdot)\,A_2(\eta; \cdot) = 0$$

---

*) Die Einzelkerne lassen sich auch durch die Möglichkeit kürzester Darstellungen von besonderer Art kennzeichnen. Ist $A(\xi; x)$ eine zweireihige Funktion über $(F), \overline{(G)}$ vom Range $\varrho > 0$, so wähle man, was sich im Anschluß an § 3 I. leicht als möglich erweisen läßt, aus ihrer x-Schar solche Funktionen $M_1(x), \ldots M_\varrho(x)$ aus, daß $\bar{M}_\alpha(\cdot)\,M_\beta(\cdot) = \varepsilon_{\alpha\beta}$ ist, unter $\varepsilon_{\alpha\beta}$ für $\alpha \neq \beta$ die Zahl 0, für $\alpha = \beta$ die Zahl 1 verstanden. Hierauf setze man $A(\xi; x) = \bar{N}_1(\xi)\,M_1(x) + \cdots + \bar{N}_\varrho(\xi)\,M_\varrho(x)$; dann ist $N_\alpha(\xi) = \bar{A}(\xi; \cdot)\,M_\alpha(\cdot)$. Ist also speziell $A(\xi; x)$ ein Einzelkern, so sind $M_\alpha(x), N_\alpha(\xi)$ zusammengehörige Eigenfunktionen zum Eigenwert 1 für das reziproke Paar A, B, dessen A aus dem Kerne $A(\xi; x)$ entsteht, und daher nach Satz 36 auch $\bar{N}_\alpha(\cdot\cdot)\,N_\beta(\cdot\cdot) = \varepsilon_{\alpha\beta}$. Sind umgekehrt $M_\alpha(x), N_\alpha(\xi)$ je ϱ Funktionen aus $(F), (G)$, für welche $\bar{M}_\alpha(\cdot)\,M_\beta(\cdot) = \varepsilon_{\alpha\beta}$, $\bar{N}_\alpha(\cdot\cdot)\,N_\beta(\cdot\cdot) = \varepsilon_{\alpha\beta}$ ist, so ist die Funktion $A(\xi; x) = \bar{N}_1(\xi)\,M_1(x) + \cdots + \bar{N}_\varrho(\xi)\,M_\varrho(x)$ ein Einzelkern vom Range ϱ.

ausgedrückt werden kann; man erkennt dies auch aus der zweiten Fassung der Definition, da die beiden Gleichungen den Relationen (84.) entsprechen.

Eine Zusammenstellung k, $F(x)$, $G(\xi)$ einer von 0 verschiedenen Konstanten und zweier von 0 verschiedener Funktionen aus (F), (G), welche das Gleichungssystem

$$\begin{cases} k\,G(\xi) = \bar{A}(\xi;\cdot)\,F(\cdot) \\ k\,F(x) = A(\cdot\cdot;x)\,G(\cdot\cdot) \end{cases}$$

erfüllen, heißt ein *Eigentripel des Kernes* $A(\xi;x)$. Die Eigentripel des Kernes sind identisch mit den Eigentripeln desjenigen reziproken Paares A, B, dessen A aus dem Kerne entsteht.

Nach Einführung dieser Benennungen können wir die für reziproke Paare endlicher A, B entwickelten Resultate auch so aussprechen:

Satz 41. Jede von 0 verschiedene zweireihige Funktion $A(\xi;x)$ über (F), $(\overline{G})$ läßt sich auf eine und nur eine Weise in die Gestalt

$$A(\xi;x) = k_1\,A_1(\xi;x) + \cdots + k_\tau\,A_\tau(\xi;x)$$

setzen, worin die $A_\alpha(\xi;x)$ von 0 verschiedene Einzelkerne, die k_α reelle Konstanten >0 und im Falle $\tau > 1$ die $A_\alpha(\xi;x)$ paarweise orthogonal, die k_α verschieden sind.

Es sind dann die $\pm k_\alpha$ die einzigen Eigenwerte des Kernes $A(\xi;x)$, und zu $\pm k_\alpha$ gehören als Eigenfunktionen aus (F) die von 0 verschiedenen Funktionen der x-Schar von $A_\alpha(\xi;x)$, als Eigenfunktionen aus (G) die von 0 verschiedenen Funktionen der ξ-Schar von $A_\alpha(\xi;x)$, und nur diese.

Nimmt man im Satze 41 für $A(\xi;x)$ speziell eine Bilinearform der x und ξ und als Faltungen die Hauptfaltungen, so erhält man den Satz von der „kanonischen Orthogonalzerlegung der Bilinearformen“*).

---

*) Unter diesem Namen erwähnt bei *E. Schmidt*, a. a. O. Einleitung und Kap. III.

Entwicklung willkürlicher Funktionen bei einem thermoelastischen Problem.

Von Herrn *Herbert Laudien* in Hirschberg*).

Probleme der Wärmeleitung in homogenen Körpern mit Berücksichtigung der durch die Temperaturänderung bedingten elastischen Verrückungen, wie sie *Duhamel* und *Franz Neumann* behandelt haben, haben in neuester Zeit dadurch besonders Interesse gewonnen, daß sie auf homogene Integralgleichungen mit unsymmetrischen Kernen führen und damit zu der Aufgabe, willkürliche Funktionen nach den Funktionen eines Biorthogonalsystems zu entwickeln. Solche Entwicklungen sind zuerst behandelt von *Hilb***). Mit den Resultaten, zu denen *Hilb* vordringt, erledigt sich eine große Anzahl derjenigen Probleme, bei denen die Eigenfunktionen der Kerne unhomogenen Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung genügen. Bei Wärmeleitungsproblemen der oben bezeichneten Art ergibt sich meist für die Eigenfunktionen eine Integrodifferentialgleichung, bei deren Überführung in eine Integralgleichung sich der Kern nicht direkt als Lösung einer Differentialgleichung aufstellen läßt; vielmehr wird er gebildet mit einer zunächst hilfsweise als Lösung einer Differentialgleichung 2. O. einzuführenden symmetrischen *Green*schen Funktion.

Die Wärmeleitung im Stabe, dessen Enden auf der konstanten Temperatur 0 gehalten werden, auf den außerdem von außen keine Kräfte einwirken, ist von *Koschmieder****) behandelt worden. Im folgenden geschieht

*) Der Verfasser ist im April 1917 für das Vaterland gefallen. Die Arbeit ist ein verkürzter Abdruck des 4. Kap. seiner Dissertation: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Funktionen orthogonaler und biorthogonaler Systeme. Breslau 1914.

**) Dieses Journal Bd. 140.

***) Dieses Journal Bd. 143.

dies für eine Kugel, deren Temperatur auf jeder mit ihr konzentrischen Kugel nur mit der Zeit variiert und auf die von außen keine Kräfte einwirken.

Die von *Duhamel* aufgestellten allgemeinen Differentialgleichungen*) eines thermomechanischen Problems sind, wenn r den Abstand vom Kugelmittelpunkt und $r \cdot \varphi$ den Zuwachs desselben für ein bestimmtes Teilchen bezeichnet,

$$(1.)\quad \text{a)}\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{k}{\Delta \cdot c_v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\frac{c_p}{c_v} - 1}{3\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(3\varphi + r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right),$$

$$\text{b)}\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{5\delta}{3r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = 0.$$

Hierin bedeutet v die Temperatur, t die Zeit, k die innere Leitfähigkeit, c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck, δ die Ausdehnung der Längeneinheit bei Erwärmung von 0^0 auf 100^0, Δ die Dichte des Körpers.

Zu den Gleichungen (1.) treten, wenn der Radius der Kugel $= 1$ ist, die thermischen und mechanischen Grenzbedingungen

$$(2.)\quad \text{a)}\quad \left.\frac{\partial v}{\partial r} + hv\right|^{r=1} = 0,$$

$$\text{b)}\quad 5\varphi + 3r\frac{\partial \varphi}{\partial r} - 5\delta v = 0.$$

Der Ausdruck $\varphi = \frac{5\delta}{3r^3}\int_0^r vr^2 dr + \frac{4\delta}{3}\int_0^1 vr^2 dr$ genügt, welches auch die Funktion v sein möge, den Differentialgleichungen (1^b.) und (2^b.).

Setzt man diesen Wert in (1^a.) ein und setzt $v \cdot r = V$, $\frac{9k}{(4c_v + 5c_p)\Delta} = a^2$, $\frac{12(c_p - c_v)}{4c_v + 5c_p} = b^2$, so erhält man für V die Integrodifferentialgleichung

$$(3.)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - b^2 r\int_0^1 r\frac{\partial V}{\partial t}\,dr.$$

Diese Gleichung ist zu lösen für die Randbedingungen $V|^{r=0} = 0$, $\frac{dV}{dr} + hV|^{r=1} = 0$.

Für $t = 0$ ist $V = f(r)$ eine willkürlich gegebene Funktion von r.

Es entsteht die Aufgabe, $f(r)$ in eine nach den Lösungen der Integrodifferentialgleichung (3.) fortschreitende Reihe zu entwickeln; diese hat schon *Liouville***) behandelt; er fand, daß diese Lösungen zu denen einer

*) Journal de l'École Polytechnique Bd. 15, Cah. 25.

**) Journal de math. Sér. 1, Bd. 2.

Differentialgleichung 2. O. orthogonal sind. In diesem Umstande liegt das Interesse, das die Aufgabe für die Theorie der Integralgleichungen besitzt.

I. Das Biorthogonalsystem.

Wir schreiben für r jetzt x; wird

$$V = e^{-a^2\varrho^2 t}u(x)$$

gesetzt, so ergibt sich für den Raumfaktor $u(x)$ die Integrodifferentialgleichung

$$u'' + \varrho^2(u + b^2 x\int_0^1 x u\,dx) = 0. \tag{4.}$$

Die Randbedingungen, denen u zu genügen hat, sind

$$u\big|^{x=0} = 0, \qquad u' + hu\big|^{x=1} = 0.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4.) hat die Form

$$u = A\sin\varrho x + B\cos\varrho x - b^2 x\int_0^1 x u\,dx.$$

Setzt man $\alpha(\varrho) = \dfrac{3b^2}{3+b^2}\cdot\dfrac{\sin\varrho - \varrho\cos\varrho}{\varrho^2}$, $A = \dfrac{1}{\varrho}$, so ist

$$u = \frac{\sin\varrho x - \alpha(\varrho)\cdot x}{\varrho}$$

eine der ersten Randbedingung genügende Lösung, und die zweite Randbedingung liefert die Eigenwerte als Wurzeln der Gleichung

$$\omega(\varrho) = \cos\varrho + \frac{h\sin\varrho}{\varrho} - \frac{\alpha(\varrho)(h+1)}{\varrho} = 0;$$

wir bezeichnen sie mit $\varrho_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$. *Liouville* hat bewiesen, daß sie sämtlich reell und von einander verschieden sind (a. a. O. S. 445 ff.). Für großes ν haben sie die Form $\varrho_\nu = (2\nu+1)\frac{\pi}{2} + \frac{B_\nu}{\nu}$, wo B_ν eine Funktion des Index ν bezeichnet, deren absoluter Wert niemals einen von ν unabhängigen Maximalwert überschreitet, sodaß, sobald ν eine gewisse Grenze überschritten hat, die Wurzeln ϱ_ν von den Stellen $(2\nu+1)\frac{\pi}{2}$ beliebig wenig verschieden sind.

Neben der Gleichung (4.) betrachten wir nach dem Vorgange von *Liouville* und *Hilb* die Differentialgleichung

$$v'' + \varrho^2 v = 0, \tag{5.}$$

deren Lösungen den Randbedingungen

$$v|^{x=0} = 0,\ v'(1) + hv(1) - \frac{3b^2(1+h)}{3+b^2}\int_0^1 xv\,dx = 0$$

genügen; diese sind $v_\nu = \frac{\sin \varrho_\nu x}{\varrho_\nu}$. Die Eigenwerte der Differentialgleichung (5.) sind ebenfalls die Größen ϱ_ν.

Es sei nun u_μ die zum Eigenwert $\varrho = \varrho_\mu$ gehörende Lösung von (4.), $v_\varkappa$ die zum Eigenwert $\varrho = \varrho_\nu$ gehörende Lösung von (5.), so folgt aus den Gleichungen

$$u_\mu'' + \varrho_\mu^2 (u_\mu + b^2 x \int_0^1 x u\,dx) = 0,$$

$$v_\nu'' + \varrho_\nu^2 v_\nu = 0,$$

wenn man die erste mit v_ν, die zweite mit u_μ multipliziert, subtrahiert und von 0 bis 1 integriert, für $\mu \gtrless \nu$

$$\int_0^1 u_\mu v_\nu\,dx = \frac{1}{\varrho_\mu^2 - \varrho_\nu^2} u_\mu(1) \cdot \omega(\varrho_\nu) = 0.$$

Die Funktionen u und v bilden also ein Orthogonalsystem; ist $\mu = \nu$, so ist $\int_0^1 u_\nu v_\nu\,dx = -\frac{u_\nu(1)\frac{d\omega}{d\varrho}\Big|^{\varrho=\varrho_\nu}}{2\varrho_\nu}$.

II. Überführung der Differentialgleichungen (4.) und (5.) in Integralgleichungen.

Die *Green*sche Funktion $G(x,\xi)$ genüge den Randbedingungen $G(x,\xi)|^{x=0} = 0$, $\frac{\partial G}{\partial x} + hG|^{x=1} = 0$ und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2} = 0. \tag{6.}$$

Ferner sei $\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=\xi+0}^{x=\xi-0} = 1$. Setzt man

$$\int_0^1 \alpha G(\alpha,\xi)\,d\alpha = \Phi(\xi),\quad G(x,\xi) + b^2 x \Phi(\xi) = K(x,\xi),$$

so erhält man aus (4.) und (6.) durch *Green*sche Kombination die Integralgleichung

$$u(\xi) = \varrho^2 \int_0^1 K(x,\xi)\,u(x)\,dx$$

mit dem unsymmetrischen Kern $K(x,\xi)$.

Dieser genügt als Funktion von x der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = 0, \tag{7.}$$

als Funktion von ξ der Differentialgleichung

(8.) $$\frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} = -b^2 x \xi$$

und den Randbedingungen

$$K(0,\xi) = 0,\ \left[\frac{\partial K}{\partial x} + hK\right]^{x=1} = b^2(1+h)\Phi(\xi);$$

$$K(x,0) = 0,\ \left[\frac{\partial K}{\partial \xi} + hK\right]^{\xi=1} = 0.$$

Die expliziten Ausdrücke für den Kern $K(x,\xi)$ sind folgende:

$$K\underset{x<\xi}{(x,\xi)} = \left(1 - \frac{h\xi}{1+h}\right)x + b^2 x \frac{\xi(3+h) - \xi^3(1+h)}{6(1+h)},$$

$$K\underset{x>\xi}{(x,\xi)} = \left(1 - \frac{hx}{1+h}\right)\xi + b^2 x \frac{\xi(3+h) - \xi^3(1+h)}{6(1+h)}.$$

Durch *Green*sche Kombination der Differentialgleichungen (5.) und (8.) ergibt sich für v die Integralgleichung

$$v(x) = \varrho^2 \int_0^1 K(x,\xi)\, v(\xi)\, d\xi.$$

$f(x)$ sei eine stückweise stetige Funktion, dann sind die Funktionen $F(\xi) = \int_0^1 K(x,\xi) f(x)\, dx$ und $\bar{F}(x) = \int_0^1 K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$, die wir mit *Kneser**) quellenmäßig dargestellt nennen, mit ihrer ersten Ableitung stetig, während die zweiten Ableitungen stückweise stetig sind. Es ergeben sich leicht die für F und $\bar{F}$ geltenden Randbedingungen

a) $$F(0) = 0,\ F'(1) + hF(1) = 0;$$

b) $$\bar{F}(0) = 0,\ \bar{F}'(1) + h\bar{F}(1) = \frac{b^2(1+h)\int_0^1 \xi \bar{F}(\xi)\, d\xi}{1 + b^2(1+h)\Phi(1)},$$

letztere mit Berücksichtigung der Identität

$$\int_0^1 \Phi(\xi) f(\xi)\, d\xi = \frac{\int_0^1 \xi \bar{F}(\xi)\, d\xi}{1 + b^2(1+h)\Phi(1)}.$$

Umgekehrt ist jede den Randbedingungen a) oder b) genügende, mit ihrer ersten Ableitung stetige Funktion, deren zweite Ableitung stückweise stetig ist, quellenmäßig darstellbar. Sind F und $\bar{F}$ Funktionen von dieser Eigenschaft, von denen F den Randbedingungen a), $\bar{F}$ den Randbedingungen b) genügt, so definieren wir einmal $f(x)$ durch die Gleichung

---

*) *Kneser*, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik (Braunschweig 1911), § 2.

$$f(x) = -F''(x) - \frac{3b^2}{3+b^2}(1+h)xF(1);$$

aus dieser und der Gleichung (7.) folgt durch *Green*sche Kombination

$$F(\xi) = \int_0^1 K(x,\xi)\, f(x)\, dx.$$

Das andre Mal definieren wir die Funktion f durch die Gleichung $\frac{d^2\bar{F}}{d\xi^2} = -f(\xi)$; aus dieser und der Gleichung (8.) folgt wie oben

$$\bar{F}(x) = \int_0^1 K(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi.$$

III. Ein allgemeinerer Kern $K_1(x,\xi)$ und seine Entwicklung nach den Eigenfunktionen.

Der Kern $K_1(x,\xi)$ genüge der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2} + z^2 K_1(x,\xi) = 0 \tag{9.}$$

und den Randbedingungen

$$K_1(0,\xi) = 0,\ (1+D)\frac{\partial K_1}{\partial x}\Big|^{x=1} + K_1(1,\xi)(h-D) = -D\xi,$$

wobei $D = \frac{3b^2(1+h)}{z^2(3+b^2)}$ gesetzt ist.

Aus (4.) und (9.) folgt die Integralgleichung

$$u(\xi) = (\varrho^2 - z^2)\int_0^1 K_1(x,\xi)\, u(x)\, dx.$$

Es ist

$$K_1(x,\xi)_{x<\xi} = \frac{\{\cos z\xi \cdot z \cdot \omega(z) + \sin z\xi\,[D(z\sin z+\cos z) + z\sin z - h\cos z] - zD\xi\}\sin zx}{z^2\,\omega(z)},$$

$$K_1(x,\xi)_{x>\xi} = \frac{\{\sin z\xi\,[D(z\sin z+\cos z) + \sin z - h\cos z] - zD\xi\}\sin zx + z\,\omega(z)\cos zx\sin z\xi}{z^2\,\omega(z)}.$$

Eine andre Form für $K_1(x,\xi)$, welche erkennen läßt, daß $K_1(x,\xi)$ sich ebenso wie $K(x,\xi)$ aus einem symmetrischen und einem unsymmetrischen Summanden zusammensetzt, läßt sich aus der oben angegebenen leicht ableiten. Setzt man

$$G_1(x,\xi)_{x<\xi} = \frac{\{z\cos z(1-\xi) + h\sin z(1-\xi) + D\cdot[z\cos z(1-\xi) - \sin z(1-\xi)]\}\sin zx}{z^2\,\omega(z)},$$

$$G_1(x,\xi)_{x>\xi} = \frac{\{z\cos z(1-x) + h\sin z(1-x) + D\cdot[z\cos z(1-x) - \sin z(1-x)]\}\sin z\xi}{z^2\,\omega(z)},$$

so ist

$$K_1(x,\xi) = \underset{x<\xi}{G_1}(x,\xi) - \frac{D\cdot\xi\sin zx}{z\,\omega(z)};\quad K_1(x,\xi) = \underset{x>\xi}{G_1}(x,\xi) - \frac{D\cdot\xi\sin zx}{z\,\omega(z)}.$$

Der Kern $K_1(x,\xi)$ erscheint somit als meromorphe Funktion der Größe z; die Pole sind die Nullstellen von $\omega(z)$, d. h. die Größen $\pm\varrho_\nu$. Wir bezeichnen nun mit K_n einen Kreis, der die ersten $2n$ Nullstellen $\pm\varrho_\nu$ umschließt; der Radius von K_n kann, sobald n eine gewisse Grenze überschritten hat, gleich $(n+1)\pi$ gewählt werden. In diesem Falle schneidet K_n die reelle Achse zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1}; dann bilden wir das Konturintegral $\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz$, worin wir mit μ eine Konstante bezeichnen, und erhalten auf Grund des *Cauchy*schen Residuensatzes

$$(10^{a}.)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = K_1(x,\xi)\Big|^{z=\mu} - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{u_\nu(\xi)v_\nu(x)}{(\varrho_\nu^2-\mu^2)\int_0^1 u_\nu v_\nu\,dx}$$

und, falls das links stehende Konturintegral mit unbegrenzt wachsendem n konvergiert,

$$(10^{b}.)\quad \frac{1}{2\pi i}\lim_{n=\infty}\int_{K_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = K_1(x,\xi)\Big|^{z=\mu} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u_\nu(\xi)v_\nu(x)}{(\varrho_\nu^2-\mu^2)\int_0^1 u_\nu v_\nu\,dx}.$$

Bei der Abschätzung des Konturintegrals sowie des weiter unten zu behandelnden $\int_{K_n}\frac{\partial K_1}{\partial x}\frac{dz}{z-\mu}$ machen wir Gebrauch von zwei von *Freund**) abgeleiteten Formeln.

Ist β eine Zahl derart, daß $0\leqq\beta\leqq 1$ ist; sind ferner $R(z)$ und $S(z)$ zwei rationale Funktionen und $\lim_{|z|=\infty} R(z) = c_1$, $\lim_{|z|=\infty} S(z) = c_2$ endliche Werte; sind schließlich C_n Konturen, die mit n unbegrenzt wachsen, jedoch keine Nullstelle von $e^z - S(z)$ enthalten, so gilt die Gleichung

$$(11.)\qquad \lim_{n=\infty}\int_{C_n}\frac{e^{\beta z}R(z)}{e^z-S(z)}\cdot\frac{dz}{(z-\mu)^k} = 0 \qquad (k>1).$$

Ist α eine Zahl derart, daß $0\leqq\alpha<1$, und behalten $R(z), S(z), C_n$ die oben festgelegte Bedeutung, so gilt die Gleichung

$$(12.)\qquad \lim_{n=\infty}\int_{C_n}\frac{e^{\alpha z}R(z)}{e^z-S(z)}\cdot\frac{dz}{z-\mu} = 0.$$

---

*) *Eugen Freund*, Entwicklung willkürlicher Funktionen vermittelst meromorpher. Diss. Breslau 1909.

Ersetzt man in $K_1(x, \xi)$ die trigonometrischen durch die Exponentialfunktionen, so zerfällt das Integral in eine Anzahl von Teilintegralen, die alle auf Grund der Gleichung (11.) mit wachsenden n gegen Null konvergieren. Somit folgt aus (10^b.)

$$K_1(x, \xi)\Big|^{z=\mu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(\xi)\, v_\nu(x)}{(\varrho_\nu^2 - \mu^2) \int_0^1 u_\nu\, v_\nu dx}$$

und weiter, da $\lim_{\mu=0} K_1(x, \xi) = K(x, \xi)$ ist,

$$K(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(\xi)\, v_\nu(x)}{\varrho_\nu^2 \int_0^1 u_\nu\, v_\nu\, dx}.$$

IV. Darstellung willkürlicher Funktionen.

Wir erhalten zwei Arten von Reihenentwicklungen, je nachdem die willkürliche Funktion den Randbedingungen a) oder b) genügt. Ero füllt die willkürliche Funktion F die Randbedingungen a), ist sie alsdarstellbar in der Form

$$F(\xi) = \int_0^1 K(x, \xi) f(x)\, dx,$$

so erhalten wir, wenn wir für $K(x, \xi)$ die bilineare Reihe setzen,

$$F(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2 \int_0^1 u_\nu\, v_\nu\, dx} \int_0^1 v_\nu(x) f(x)\, dx;$$

nun ist

$$\int_0^1 F(\alpha)\, v_\nu(\alpha)\, d\alpha = \int_0^1 v_\nu(\alpha)\, d\alpha \int_0^1 K(x, \alpha) f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\, dx \int_0^1 K(x, \alpha)\, v_\nu(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{\varrho_\nu^2} \int_0^1 v_\nu(x) f(x)\, dx;$$

folglich:

$$F(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(\xi) \int_0^1 F(\alpha)\, v_\nu(\alpha)\, d\alpha}{\int_0^1 u_\nu\, v_\nu\, dx}.$$

Erfüllt die Funktion F die Randbedingungen b), ist sie also darstellbar in der Form $F(x) = \int_0^1 K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$, so erhalten wir

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v_\nu(x)}{\varrho_\nu^2 \int_0^1 u_\nu\, v_\nu\, dx} \int_0^1 u_\nu(\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

und da

$$\int_0^1 F(\alpha)\,u_\nu(\alpha)\,d\alpha = \int_0^1 u_\nu(\alpha)\,d\alpha \int_0^1 K(\alpha,\xi)\,f(\xi)\,d\xi = \int_0^1 f(\xi)\,d\xi \int_0^1 K(\alpha,\xi)\,u_\nu(\alpha)\,d\alpha$$
$$= \frac{1}{\varrho_\nu^2}\int_0^1 u_\nu(\xi)\,f(\xi)\,d\xi \text{ ist,}$$

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v_\nu(x)\int_0^1 F(\alpha)\,u_\nu(\alpha)\,d\alpha}{\int_0^1 u_\nu\,v_\nu\,dx}.$$

Der Nachweis der Möglichkeit, unstetige Funktionen nach den Funktionen u_ν oder v_ν zu entwickeln, gestaltet sich im Anschluß an *Knesers* Integralgleichungen §§ 5, 25 ebenso wie bei Entwicklungen nach Funktionen orthogonaler Systeme; man muß zu diesem Zweck die Entwicklungen der Ableitungen von $K(x,\xi)$ nach x und ξ besitzen.

Durch Differentiation der Gleichung (10ª.) nach x folgt

$$\text{(13.)}\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n} \frac{\partial K_1(x,\xi)}{\partial x}\,\frac{dz}{z-\mu} = \frac{\partial K_1}{\partial x}\Big|^{z=\mu} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{u_\nu(\xi)\,v_\nu'(x)}{(\varrho_\nu^2-\mu^2)\int_0^1 u_\nu v_\nu\,dx}.$$

Ersetzt man unter dem Integral die trigonometrischen Funktionen wieder durch die Exponentialgrößen, so zerfällt es, sofern der Fall $x=\xi$ zunächst noch ausgeschaltet sei, in Teilintegrale von der Form $\int_{K_n} \frac{e^{az}R(z)}{e^z - S(z)}\cdot\frac{dz}{z-\mu}$, und wir erhalten, wenn $x \neq \xi$, auf Grund der Gleichung (12.)

$$\frac{\partial K_1(x,\xi)}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(\xi)\,v_\nu'(x)}{(\varrho_\nu^2-\mu^2)\int_0^1 u_\nu v_\nu\,dx}$$

und damit auch

$$\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(\xi)\,v_\nu'(x)}{\varrho_\nu^2\int_0^1 u_\nu v_\nu\,dx}.$$

Im Falle $x=\xi$ bilden wir mit *Hilb**) den Ausdruck $\int_{Kn} \left\{\frac{\partial K_1}{\partial x}\Big|^{x=\xi+0} + \frac{\partial K_1}{\partial x}\Big|^{x=\xi-0}\right\}\frac{dz}{z-\mu}$ und erhalten ebenfalls auf Grund der Gleichung (12.)

$$\frac{\frac{\partial K_1}{\partial x}\Big|^{x=\xi+0} + \frac{\partial K_1}{\partial x}\Big|^{x=\xi-0}}{2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(\xi)\,v_\nu'(\xi)}{(\varrho_\nu^2-\mu^2)\int_0^1 u_\nu\,v_\nu\,dx}$$

und damit auch

$$\frac{\frac{\partial K}{\partial x}\Big|^{x=\xi+0} + \frac{\partial K}{\partial x}\Big|^{x=\xi-0}}{2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(\xi)\,v_\nu'(\xi)}{\varrho_\nu^2\int_0^1 u_\nu\,v_\nu\,dx}.$$

*) a. a. O. S. 227.

Schlußformel zur Hauptaufgabe der symmetrischen Funktionen.

Von Herrn *C. Kostka* in Insterburg.

„Bei einer algebraischen Gleichung eine symmetrische Funktion der Wurzeln durch die Koeffizienten darzustellen." Für die alte, oft behandelte Aufgabe ist bisher keine brauchbare Schlußformel bekannt geworden*). Wie solche durch Determinanten sich gestaltet, soll hier gezeigt werden, unter Verwertung einer einfachen, vom Verfasser vor Jahren bewiesenen Formel.

1. Die Wurzeln von $F(t) = 0$ seien $t_1, \dots t_n$, ihre symmetrischen Grundfunktionen $c_1, \dots c_n$; also:

$$(1.) \quad F(t) = (t - t_1) \,.\, (t - t_2) \dots (t - t_n) = t^n - c_1 \,.\, t^{n-1} + \cdots (-1)^n \,.\, c_n.$$

K sei ein Produkt der c, T eine eintypige Funktion der t, C eine Determinante der c von einfachem Bau; (α) und (λ) seien Reihen von positiven ganzen Zahlen, bei (λ) stets in absteigender Folge; (α') und (λ') die zugeordneten Reihen:

$$(2.) \qquad (\alpha) = \alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{m-1} = 1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots ;$$

$$(3.) \qquad (\lambda) = \lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_{r-1} ;$$

$$(3^a.) \qquad (\lambda') = r^{\lambda_r - \lambda_{r-1}}, (r-1)^{\lambda_{r-2} - \lambda_{r-1}}, \dots 2^{\lambda_1 - \lambda_2}, 1^{\lambda_0 - \lambda_1}.$$

Jeder Exponent bei (2.) und (3^a.) gibt an, wie oft die Grundzahl als Zeiger zu setzen ist; z. B. fehlt in (λ') der Zeiger 2, falls $\lambda_1 = \lambda_2$ ist. Die Anzahl der Zeiger in (λ') ist λ_0, die Anzahl derer von ihnen, die > 1 sind, ist λ_1.

$$(4.) \qquad K_{(\alpha)} = c_{\alpha_0} \,.\, c_{\alpha_1} \dots c_{\alpha_{m-1}} = c_1^{m_1} \,.\, c_2^{m_2} \,.\, c_3^{m_3} \dots ;$$

$$(5.) \qquad T_{(\alpha)} = T_{\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{m-1}} = T_{\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{n-1}} = \Sigma t_1^{\alpha_0} t_2^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_{n-1}}.$$

Die Glieder der Summe in (5.) unterscheiden sich nur durch Permu-

*) Vgl. den Schlußabsatz der Arbeit, S. 99.

tation der Exponenten, von denen $n-m$ Nullen sind; ihre Anzahl ist somit $\nu = n! : (n-m)!\, m_1!\, m_2!\, m_3! \ldots$.

$$(6.) \qquad C_{(\lambda)} = |c_\lambda\, c_{\lambda+1}\, c_{\lambda+2} \cdots c_{\lambda+r-1}|.$$

In (6.) steht rechts eine Determinante r-ten Grades, deren h-te Zeile aus der hingeschriebenen entsteht, indem $\lambda_{h-1} - h + 1$ an Stelle von λ tritt. Die Zeiger der Hauptdiagonale sind $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{r-1}$. Es wird $c_0 = 1$, jedes c mit negativem Zeiger $= 0$ gesetzt. Die Größen t_{n+1}, t_{n+2} usf. gelten als Null, daher auch c_{n+1}, c_{n+2} usf. $= 0$. Allen t wird gleiches Gewicht beigelegt. Setzt man $\varepsilon . t_h$ statt t_h für jedes h von 1 bis n, so wird $\varepsilon^r . c_r$ aus c_r und jedes T, K, C erhält ohne sonstige Änderung den Faktor ε^μ, wo μ gleich der Summe der Zeiger wird. Also ist r das Gewicht von c_r, und für das Gewicht μ von T, K, C oder auch von den Zeigerreihen (α), (λ), (α'), (λ') hat man:

$$(7.) \begin{cases} \mu = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots \lambda_{r-1} = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots \alpha_{m-1} = 1.m_1 + 2.m_2 + \cdots \mu.m_\mu, \\ \text{dabei} \qquad\qquad m_1 + m_2 + \cdots m_\mu = m. \end{cases}$$

Die Zahl m_μ kann nur 0 oder 1 sein; ist sie 1, so sind alle andern $m_h = 0$. Immer also $m_\mu! = 1$. Wird eine der Funktionen K, T, C als Summe von Funktionen einer der andern Arten dargestellt, so haben alle Glieder der Gleichung dasselbe Gewicht.

$C_{(\lambda)}$ werde nach Produkten der Elemente entwickelt; nach Vereinigung gleicher Glieder sei:

$$(8.) \qquad C_{(\lambda)} = \sum_{(\alpha)} \varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)} . K_{(\alpha)}.$$

Dann gilt auch*):

$$(9.) \qquad T_{(\alpha)} = \sum_{(\lambda)} \varkappa_{(\lambda')}^{(\alpha)} . C_{(\lambda)}.$$

Die Summen (8.) und (9.) erstrecken sich über alle Reihen (α) oder (λ), die mit der Zeigerreihe links im Gewicht übereinstimmen. Bei bestimmtem Gewicht μ ist die Anzahl der Funktionen K, T, C stets dieselbe, nämlich gleich der Anzahl verschiedener Zerlegungen der Zahl μ in positive Summanden; z. B. $= 42$, falls $\mu = 10$. Die Zahl n wird in der Regel beliebig groß genommen, z. B. $= \mu$, damit nicht einzelne Glieder der allgemeinen Lösung nur deshalb fortfallen, weil $c_{n+h} = 0$ ist.

---

*) Gl. (9.) zuerst bewiesen Journ. f. r. u. a. M. Bd. 93, S. 92, Satz 1.) im Anschluß an Bd. 81, S. 281 ff. Vgl. Bd. 132, S. 163, Formel I^b; Jahresber. d. Dtsch. Mth.-Ver. 16. Bd. S. 438, 439. Anderer Beweis: Schrft. d. phys.-ökon. Ges. in Königsberg, Jahrgg. 1908, S. 379.

$\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ ist eine ganze Zahl, positiv, negativ oder Null, unabhängig vom Wert der t, allein bestimmt durch die Zahlen in (λ) und (α). Null muß sie sein, wenn die untere und obere Reihe nicht gleiches Gewicht haben, wenn $m > r$ oder λ_0 größer als das größte α_h. Ist λ_0 gleich einem der größten α_h, so können (α) und (λ) um den einen größten Zeiger gekürzt werden; daher auch $\varkappa_{(\lambda)}^{(\lambda)} = 1$. Die Zahl $\varkappa_{(\lambda')}^{(\alpha)}$ verschwindet, wenn $m > \lambda_0$, auch wenn r größer ist als das größte α. Dies folgt alles sofort aus dem Bau von $C_{(\lambda)}$. Daß $\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ oder $\varkappa_{(\lambda')}^{(\alpha)}$ noch in andern Fällen, als den genannten, $= 0$ sind, ist sicher, darf jedoch hier unerörtert bleiben. — Die Hauptaufgabe wird gelöst sein, wenn es gelingt, $\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ als Funktion der Zahlen in (λ) und (α) darzustellen. Zunächst einige besondere Wege, $\varkappa$ zu berechnen.

a.) Man entwickle $C_{(\lambda)}$ nach den Elementen der ersten Spalte:

$$(10.)\quad C_{(\lambda)} = c_{\lambda_0} . C_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{r-1}} - c_{\lambda_1 - 1} . C_{\lambda_0 + 1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_{r-1}} + c_{\lambda_2 - 2} . C_{\lambda_0 + 1, \lambda_1 + 1, \lambda_3 \ldots \lambda_{r-1}} - \ldots .$$

Die Summe hat höchstens r Glieder; sie bricht ab, sobald der voranstehende Faktor c negativen Zeiger hat. Nach (10.) kann $\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ durch Zahlen derselben Art, aber leichter zu berechnen, ausgedrückt werden. Ist λ_0 in (α) nicht enthalten, so kann das erste Glied in (10.) zum Wert von $\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ nichts beitragen. Findet sich aber λ_0 in der Reihe (α), so ist zu prüfen, ob $K_{(\alpha)} : c_{\lambda_0}$ in dem andern Faktor $C_{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{r-1}}$ vorkommt. Ebenso Prüfung der andern Glieder. So wird $\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ durch andere $\varkappa$ dargestellt, deren untere Zeigerreihe sich mehr und mehr verkürzt. Auch die obere Reihe verkürzt sich, es sei denn, daß c_0 als Faktor voransteht; dann aber wirkt wieder die Erhöhung des vordersten λ günstig für die weitere Rechnung. Bei Ausführung der Rechnung ist auf gleiches Gewicht der unteren und oberen Reihe bei jedem $\varkappa$ zu achten. Ein Beispiel:

$$\varkappa_{5,4^3,2,1^3}^{7,3^3,2} = -\varkappa_{6,4,2,1^3}^{7,3^2 2} + \varkappa_{6,5,2,1^3}^{7,3^3} = \varkappa_{7,2,1^3}^{7,3,2} - \varkappa_{7,5,1^3}^{7,3^2,2} + \varkappa_{7,6,1^3}^{7,3^3} = \varkappa_{2,1^3}^{3,2} = \varkappa_{1^3}^{3,0} - \varkappa_{3,1^2}^{3,2} = -\varkappa_{2,1}^{3,0} - \varkappa_{1^2}^{2,0} = +2.$$

b.) Wird $1 : t_h$ statt t_h gesetzt für alle Werte des h von 1 bis n, so tritt $c_{n-h} : c_n$ an Stelle von c_h, ferner $K_{n-a_0, n-a_1, \ldots n-a_{m-1}} : c_n^m$ und $C_{n-\lambda_{r-1}, n-\lambda_{r-2}, \ldots n-\lambda_0} : c_n^r$ an Stelle von $K_{(\alpha)}$ und $C_{(\lambda)}$. Dagegen bleibt $\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ in (8.) ungeändert, und es wird aus (8.):

$$C_{n-\lambda_{r-1}, n-\lambda_{r-2}, \ldots n-\lambda_0} = \sum_{(\alpha)} \varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)} . K_{n-a_0, \ldots n-a_{m-1}} . c_n^{r-m} .$$

Also ist $\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ zugleich der Zahlenfaktor von $c_n^{r-m} . K_{n-a_0, \ldots n-a_{m-1}}$ im Ausdruck für $C_{n-\lambda_{r-1}, \ldots n-\lambda_0}$. Setzt man α_0 statt des beliebigen n, falls

größer als α_0 kein anderes α_h ist, so hat man:

(11.) $$\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)} = \varkappa_{a_0-\lambda_{r-1}, a_0-\lambda_{r-2}, \ldots a_0-\lambda_0}^{a_0{}^{r-m}, a_0-a_1, \ldots a_0-a_{m-1}}.$$

Aus (11.) ist stets Nutzen zu ziehen, wenn $r.\alpha_0 < 2\mu$ ist. Aber auch z. B.:

$$\varkappa_{6,3^4,1^4}^{7,4^2,2,1^5} = \varkappa_{6^4,4^4,1}^{6^5,5,3^2} = \varkappa_{4^4,1}^{6,5,3^2} = \varkappa_{5,2^4}^{6,3^2,1} = -\varkappa_{6,2^3}^{6,3^2} + \varkappa_{6,3,2^2}^{6,3^2,1} = -\varkappa_{3^2}^{3^2} + \varkappa_{2^2}^{3,1} = -2.$$

c.) Sei $[m_\lambda]$ die Summe aller m_h, deren Zeiger $h \geqq \lambda$, dann ist*):

(12.) $$\varkappa_{\lambda,1^{r-1}}^{(\alpha)} = (-1)^{r-m} \cdot \frac{(m-1)!\,.\,[m_\lambda]}{m_1!\, m_2! \ldots m_\mu!}$$ und für $\lambda = 1$:

(12ª.) $$\varkappa_{1^r}^{(\alpha)} = (-1)^{r-m} \cdot \frac{m!}{m_1!\, m_2! \ldots m_\mu!}.$$ Ferner

(13.) $$\varkappa_{\lambda_0,\lambda_1,1^{r-2}}^{(\alpha)} = (-1)^{r-m} \cdot \frac{(m-2)!}{m_1!\, m_2!\, m_3! \ldots} \cdot \begin{vmatrix} m_{\lambda_0} & [m_{\lambda_0+1}] \\ m_{\lambda_1-1} & [m_{\lambda_1}] - 1 \end{vmatrix}.$$

Die Richtigkeit von (12ª.) erkennt man für $r = 1, 2, 3, 4$ aus den Gleichungen:

$C_1 = c_1$; $C_{1^2} = c_1^2 - c_2$; $C_{1^3} = c_1^3 - 2c_1c_2 + c_3$; $C_{1^4} = c_1^4 - 3c_1^2c_2 + c_2^2 + 2c_1c_3 - c_4$.

Sie sei erwiesen für alle Zahlen von 1 bis $r-1$. Dann kann in

$$C_{\lambda,1^{r-1}} = c_\lambda . C_{1^{r-1}} - c_{\lambda+1} . C_{1^{r-2}} + c_{\lambda+2} . C_{1^{r-3}} - \cdots$$

jede Determinante rechts nach (8.) und (12ª.) umgeformt werden. Vereinigt man den voranstehenden Faktor c_h mit jedem Summenglied, setzt aber $m_h : m_h!$ statt $1 : (m_h - 1)!$, so folgt (12.), zugleich auch (12ª.) für das um 1 größere r. Wird in

$$C_{\lambda_0,\lambda_1,1^{r-2}} = c_{\lambda_0} . C_{\lambda_1,1^{r-2}} - c_{\lambda_1-1} . C_{\lambda_0+1,1^{r-2}}$$

jede der beiden Determinanten rechts nach (8.) und (12.) entwickelt und, wie vorhin, der vordere Faktor zum Summenglied gebracht, so folgt (13.). Wird $\lambda_1 = 1$ bei (13.), also $[m_{\lambda_1}] = m$, so setze man statt $m_{\lambda_1-1} = m_0$ den Wert $-(m-1)$, addiere die zweite Spalte der Determinante zur ersten, so geht (13.) in (12.) über.

Als Anwendung von (12.) bestimmen wir T_μ, die Potenzsumme vom Grade μ. Hier ist $(\alpha) = \mu, 0$; $\varkappa_{\lambda,1^{\mu-\lambda}}^{\mu,0} = (-1)^{\mu-\lambda}$, aber $\varkappa_{(\lambda)}^{\mu,0} = 0$, sobald zwei oder mehr Zeiger $\lambda_h > 1$ in λ sich finden. Daher nach (9.), (12.), (8.) und (7.):

---

*) (12ª.) zuerst bei *Naegelsbach* Progr. Zweibrücken 1871, S. VII; (12.) zuerst dieses Journ. 93, S. 115. Aus Gl. (25.) und (25ª.) derselben Seite folgt für $p = 2$ unsere Gl. (13.).

$$T_\mu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} (-1)^{\lambda-1} . C_{\lambda, 1^{\mu-\lambda}} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} (-1)^{\lambda-1} . \sum_{(a)} \varkappa^{(a)}_{\lambda, 1^{\mu-\lambda}} . K_{(a)}$$

$$= \sum_{(a)} (-1)^{\mu-\lambda+1-m+\lambda-1} . \frac{(m-1)!\,(m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \cdots)}{m_1!\, m_2!\, m_3! \ldots} . K_{(a)}$$

$$= (-1)^\mu . \mu . \sum_{(a)} (-1)^m . \frac{(m-1)!}{m_1!\, m_2!\, m_3! \ldots} . K_{(a)} .$$

Das ist *Warings* bekannte Formel.

Durch (9.) und (12ª.) wird auch leicht *Warings* Aufgabe gelöst: $T_{1^{m_1}, 2^{m_2}}$ zu bestimmen*). Hier ist $\mu = m_1 + 2m_2$; $m = m_1 + m_2$; es darf nicht $\lambda_0 < m$ oder $r > 2$ sein. Also:

$$T_{1^{m_1}, 2^{m_2}} = \sum_{h=0}^{h=m_2} \varkappa^{2^{m_2}, 1^{m_1}}_{2^{m_2-h}, 1^{m_1+2h}} \cdot C_{m+h, m_2-h}$$

$$= \sum_{h=0}^{h=m_2} \varkappa^{2^h, 1^{m_1}}_{1^{m_1+2h}} \cdot C_{m+h, m_2-h} = \sum_{h=0}^{h=m_2} (-1)^h . \frac{(m_1+h)!}{m_1!\, h!} . C_{m+h, m_2-h} .$$

Versucht man, ähnlich wie (13.) den Fall zu erledigen, daß $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 > 1$ sind, so stößt man auf Hindernisse, sobald zwei dieser Zahlen gleich sind.

2. Seien p Zahlen λ_h größer als 1, also:

$$(\lambda) = \lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{p-1}, 1^{r-p} .$$

In $C_{(\lambda)}$ haben die vorderen $p-1$ Spalten von der $(p+1)$-ten Zeile ab nur Nullen. Zerlegt man $C_{(\lambda)}$ in eine Summe von Produkten aus je zwei Teildeterminanten, davon je eine vom $(p-1)$-ten Grad und aus den vorderen $p-1$ Spalten entnommen, so hat die Summe p Glieder, die eine Determinante p-ten Grades bilden:

$$(14.) \qquad C_{(\lambda)} = | c_\lambda\, c_{\lambda+1} \ldots c_{\lambda+p-2}\, C_{+p-1, 1^{r-p}} |$$

in abgekürzter Schreibart, wie bei (6.). Hier wird das letzte Element jeder Zeile nach (12.) entwickelt, dabei $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{m}$ statt r und m gesetzt, also:

$$(14ª.) \quad C_{(\lambda)} = \left| c_\lambda\, c_{\lambda+1} \ldots c_{\lambda+p-2} \sum_{\mathfrak{m}} (-1)^{\mathfrak{r}-\mathfrak{m}} . \frac{(\mathfrak{m}-1)!\,[\mathfrak{m}_{\lambda+p-1}]}{\mathfrak{m}_1!\, \mathfrak{m}_2!\, \mathfrak{m}_3! \ldots} . c_1^{\mathfrak{m}_1} . c_2^{\mathfrak{m}_2} . c_3^{\mathfrak{m}_3} \ldots \right| .$$

Sei zunächst $\lambda_{p-1} > p-1$, daher in den ersten p Zeilen von $C_{(\lambda)}$ kein c_h vorhanden, dessen Zeiger Null oder negativ ist. Dann ist $\mathfrak{r} = r - p + 1$ und $\mathfrak{m} = m - p + 1$, oder $\mathfrak{r} - \mathfrak{m} = r - m$ und $\mathfrak{m} - 1 = m - p$; ferner ist $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \cdots = \mathfrak{m}$ und $1.\mathfrak{m}_1 + 2.\mathfrak{m}_2 + 3.\mathfrak{m}_3 + \cdots = \lambda + r - 1$, dem Gewicht jenes C. Nach (12.) ist $r - p + 1$ die Gliederzahl in $[\mathfrak{m}_{\lambda+p-1}]$; also beginnt in der l-ten Zeile von (14ª.) die Summe [ ] mit $\mathfrak{m}_{\lambda_{l-1}-l+p}$ und endet mit $\mathfrak{m}_{\lambda_{l-1}-l+r}$. Das Σ der l-ten Zeile wird mit Σ_{l-1} bezeichnet.

*) *Waring*, Medit. algebr. ed. III, p. 14f. Vergl. *Serret*, Cours d'alg. sup. I, 176; ferner d. Verf., Journ. 81, S. 288; *Saalschütz*, Arch. d. Mth. u. Phys. 3. Rhe, IX, S. 140ff.

Jedes Glied aus Σ_{l-1} ist mit jedem der $(p-1)!$ Produkte zu multiplizieren, welche die zu Σ_{l-1} gehörige Teildeterminante enthält, z. B. aus Σ_{l-1} das Glied $c_1^{\mathfrak{m}_1}.c_2^{\mathfrak{m}_2}.c_3^{\mathfrak{m}_3}\ldots$ nebst dem zugehörigen Zahlenfaktor mit dem Glied $\pm c_1^{i_1} c_2^{i_2} c_3^{i_3}\ldots$ aus der Teildeterminante. Bei letzterem wird das Vorzeichen durch die Stellung der c in der Teildeterminante bestimmt, und es ist $i_1+i_2+i_3+\cdots=p-1$ und $1.\,i_1+2.\,i_2+3.\,i_3+\cdots=\mu-\lambda_{l-1}+l-r$. Tritt zu dem aus Σ_{l-1} stammenden Glied ein Faktor c_h hinzu, so ist $(\mathfrak{m}_h+1).c_h^{\mathfrak{m}_h+1}:(\mathfrak{m}_h+1)!$ statt $c_h^{\mathfrak{m}_h}:\mathfrak{m}_h!$ zu setzen; kommen aber nacheinander i_h gleiche Faktoren c_h hinzu, so tritt $(\mathfrak{m}_h+1)\cdot(\mathfrak{m}_h+2)\cdots(\mathfrak{m}_h+i_h)\cdot c_h^{\mathfrak{m}_h+i_h}:(\mathfrak{m}_h+i_h)!$ für $c_h^{\mathfrak{m}_h}:\mathfrak{m}_h!$ ein. Ist h einer der Zeiger, die bei Σ_{l-1} in [ ] vorkommen, so wird beim Auflösen der Klammer einmal $\mathfrak{m}_h$ vor jenes Produkt treten, sonst $\mathfrak{m}_{h_1}$ mit anderem Zeiger, der bei c_{h_1} zu beachten ist. Die Rolle sämtlicher c_h mit bestimmtem Zeiger h innerhalb des betrachteten Gliedes wird nun deutlich. Ihre Anzahl ist $\mathfrak{m}_h+i_h=m_h$ und $m_h!$ steht im Nenner. Aus der Entwickelung von $C_{\lambda_{l-1}-l+p}$ stammen $\mathfrak{m}_h$ jener c_h; sind sie alle aus den letzten $r-p$ Zeilen entnommen, so wirken sie nur bei $\mathfrak{m}_h!$ (also auch bei $m_h!$) des Nenners mit; gehörte aber eines von ihnen der l-ten Zeile von $C_{(\lambda)}$ an, so findet sich $\mathfrak{m}_h$ auch als ein Glied in [ ] des Zählers. Die i_h andern Faktoren c_h entstammen der Teildeterminante, bestimmen das Vorzeichen des Gliedes durch ihre Stellung in der Determinante und liefern $m_h(m_h-1)\ldots(m_h-i_h+1)$ als Faktor von [ ] im Zähler. Werden in gleicher Art die übrigen Faktoren c_{h_1} usf. berücksichtigt, so ist der Aufbau des Gliedes und des zugehörigen Zahlenfaktors klar erkennbar. Der allgemeine Teil ist $c_1^{m_1}.c_2^{m_2}.c_3^{m_3}\ldots$, wobei $m_1+m_2+m_3+\cdots=m$ ist und das Gewicht mit dem von (λ) übereinstimmt. Das Vorzeichen ist $\pm(-1)^{r-m}$, wobei das Zeichen $+$ oder $-$ durch die Stellung der betreffenden c in den vorderen $p-1$ Spalten nach den Determinantenregeln festgelegt ist. Der Zahlenfaktor darf mit Einschluß des Vorzeichens geschrieben werden:

(15.) $$(-1)^{r-m}.(m-p)!\,\lfloor[m_{\lambda_{l-1}-l+p}\,].(\pm m_1^{i_1}.m_2^{i_2}.m_3^{i_3}\ldots)\rfloor:m_1!\,m_2!\,m_3!\ldots$$

Die Einrahmung $\lfloor\ \rfloor$ besagt, daß nach Auflösung der Klammer [ ] für jedes m_h^i zu setzen ist $m_h(m_h-1)\cdots(m_h-i+1)$. Der Ausdruck $m_1^{i_1}m_2^{i_2}m_3^{i_3}\ldots$ entstand, indem für jedes c_h, das aus den vorderen $p-1$ Spalten stammt, m_h gesetzt wird, und durch die Stellung dieser c_h in der Determinante, oder durch die Stellung der m_h in einer entsprechend gebauten

m-Determinante, wird das Vorzeichen + oder — bestimmt. In [] wurde das Zeichen m statt $\mathfrak{m}$ gesetzt. Dies ist statthaft. Denn bei rechnerischer Auswertung nach der durch ⌊ ⌋ bezeichneten Vorschrift kommt jedes m_h aus [] unbedingt nur mit dem Wert $m_h - i_h = \mathfrak{m}_h$ zur Geltung; die Änderung trifft also nicht die Sache, nur die Form, hier aber ist sie bequem, weil dann ausnahmslos die Regel gilt, daß zur Herleitung des kurzen Ausdrucks für $\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ jedes c_h in den oberen p Zeilen durch m_h zu ersetzen ist. — Die Zahl (15.) hat zwar Bruchform, ist jedoch eine ganze Zahl. Denn ganz sind die Zahlen aus (12ª.) nach bekanntem Satz; aus ihnen aber entstehen die Zahlen in (12.) und gleichfalls (15.) nur durch Erweiterung der Bruchform und durch Addition.

Wird in dieser Art jedes Glied der Summen $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots \Sigma_{p-1}$ mit jedem Glied der zugehörigen Teildeterminante multipliziert, so erhält man mit Sicherheit jedes Glied aus der Entwicklung von (14ª.) nebst seinem Zahlenfaktor, keines aber zweimal. Die Gliederzahl der Entwicklung kann recht erheblich sein, doch ist das Bildungsgesetz durchsichtig. Es hängt allein von dem Bau der Reihe (λ) ab. Die Werte der m_h, an sich beliebig, wenn sie nur den Bedingungen (7.) genügen, sind doch hinsichtlich der Frage, welche Gruppen von ihnen in $C_{(\lambda)}$ vorkommen können, auch von (λ) abhängig, wie der Aufbau von (15.) zeigt. Die Determinante p-ten Grades (kurze Form wie bei (6.))

$$(16.) \qquad M_{(\lambda)}^{(\alpha)} = |m_\lambda\, m_{\lambda+1} \ldots m_{\lambda+p-2}\, [m_{\lambda+p-1}]|$$

muß in der ganzen Frage eine wesentliche Rolle spielen, weil durch sie, deren Bau eng an den von $C_{(\lambda)}$ sich anschließt, klare Ordnung unter den in Betracht kommenden Zahlenfaktoren geschaffen wird.

Bevor wir nach dieser Richtung hin weitergehen, ist zu prüfen, wie die Verhältnisse sich ändern, wenn nicht mehr $\lambda_{p-1} > p-1$ gilt, sondern nur $\lambda_{p-1} \geqq 2$. Dann können in den p oberen Zeilen von $C_{(\lambda)}$ Zeiger der Elemente c auch Null oder negativ sein. Da $p = 1$ und $p = 2$ ausscheiden, kann c_0 frühestens in der dritten, ein negativer Zeiger frühestens in der vierten Zeile auftreten. Findet sich c_0 zuerst in der l-ten Zeile, so auch je einmal in jeder folgenden bis zur p-ten, und zwar von Zeile zu Zeile immer weiter nach rechts, jedoch nie über die zweite Stelle vor der Hauptdiagonale hinaus. Alle Zeilenelemente vor c_0 haben negative Zeiger und den Wert $= 0$, jedes Produkt, das solches Element als Faktor hat, ver-

schwindet. Tritt m_h überall an Stelle von c_h, so ist — z. B. für (16.) — festzusetzen, daß jedes m mit negativem Zeiger $= 0$ ist. Hingegen ist m_0 beizubehalten, es spielt eine besondere Rolle. In der zu Σ_{l-1} gehörigen Teildeterminante sei ein Glied $\pm c_0^{i_0}.c_1^{i_1}.c_2^{i_2}\ldots$, so ist $i_0+i_1+i_2+\cdots=p-1$, aber c_0 ist 1 und hat keinen Einfluß auf das Gewicht. Das Glied soll mit dem aus Σ_{l-1} stammenden Produkt $c_1^{\mathfrak{m}_1}.c_2^{\mathfrak{m}_2}.c_3^{\mathfrak{m}_3}\ldots$ nebst seinem Zahlenfaktor vereinigt werden. Zu dem Produkt treten jetzt nur $p-1-i_0$ von 1 verschiedene Faktoren hinzu; somit ist $\mathfrak{m}=m-p+1+i_0$, aber $\mathfrak{r}=r-p+1$, also $\mathfrak{r}-\mathfrak{m}=r-m-i_0$ und $\mathfrak{m}-1=m-p+i_0$. Sind zunächst, wie früher, die Faktoren c_1, c_2, usf. untereinander vereinigt zu $c_1^{m_1}.c_2^{m_2}.c_3^{m_3}\ldots$, so ist hier auch $m_h=\mathfrak{m}_h+i_h$; die bis dahin erhaltene Form des Zahlenfaktors ist die von (15.), nur statt der beiden vornstehenden Faktoren steht hier $(-1)^{r-m-i_0}.(m-p+i_0)!$. Hierfür aber kann man schreiben $(-1)^{r-m}.\lfloor(m-p)!.m_0^{i_0}\rfloor$, falls man festsetzt, daß der erste hinzutretende Faktor m_0 mit $-(m-p+1)$, der zweite mit $-(m-p+2)$ usf. in die Rechnung eingesetzt wird. Dann hat man den Zahlenfaktor:

(15ª.) $(-1)^{r-m}.(m-p)!\lfloor[m_{\lambda_{l-1}-l+p}].(\pm m_0^{i_0}.m_1^{i_1}.m_2^{i_2}\ldots)\rfloor : m_1!\,m_2!\,m_3!\ldots$,

indem auch für $\lfloor m_0^{i_0}\rfloor$ zu setzen ist $m_0(m_0-1)\ldots(m_0-i_0+1)$, dann aber $m_0=-m+p-1$. Das $\pm$ in der Klammer bei (15ª.) ist dasselbe, wie vorher vor $c_0^{i_0}c_1^{i_1}c_2^{i_2}\ldots$. Auch diese Zahlen sind, wie vorhin (15.), ganze Zahlen.

Zu überlegen bleibt noch, wie (15ª.) sich gestaltet für $m<p$, was, für $p>2$ eintreten könnte. Sei $m=p-i$. Da $\mathfrak{m}$ mindestens 1 sein muß, also $m-p+i_0$ unter 0 nicht sinken kann, ist $i_0\geqq i$. Hält man bei (15ª.) die ursprüngliche Form fest, so daß für $(m-p)!\lfloor m_0^{i_0}\rfloor$ der Ausdruck $(-1)^{i_0}(m-p+i_0)!=(-1)^{i_0}.(i_0-i)!$ steht, so ist hier, wie auch sonst üblich, $(i_0-i)!=1$ zu setzen für $i_0=i$, aber $=0$ für $i_0<i$. Der letztere Fall kann in Wirklichkeit bei der Entwicklung nicht vorkommen, er wird nur zur einheitlichen Gestaltung der allgemeinen Formel erwähnt; um seinetwillen tut man gut, bei (15ª.) auch $(m-p)!$ in die Einrahmung $\lfloor\,\rfloor$ hineinzuziehen.

Jedes Glied in der Entwicklung von (14ª.) enthält ein c-Produkt von der Form $c_0^{r-m}c_1^{m_1}c_2^{m_2}c_3^{m_3}\ldots$, also aus r Faktoren, unter denen m von 1 verschieden sind. Der höchste Zeiger eines c ist λ_0+r-1, das Gewicht des Produkts ist das von (λ). Aus (I) der Stellung, welche die Faktoren $c_1, c_2, c_3\ldots$ des Produkts in der Determinante $C_{(\lambda)}$ einnehmen, kann (II)

der zugehörige Zahlenfaktor von der Form (15ª.) ohne Zweideutigkeit ermittelt werden. Umgekehrt findet man (I), wenn (II) bekannt ist. Der Nenner von (15ª.) gibt die allgemeine Form $c_1^{m_1} c_2^{m_2} c_3^{m_3} \dots$, also ist m bekannt $= m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$. Im Zähler finden sich im Rahmen $\lfloor\ \rfloor$ $p - i_0$ Faktoren, man kennt also i_0, weil man p kennt; auch $r - m - i_0$ ist bekannt, und dies ist die Anzahl der Elemente c_0, welche aus den unteren $r - p$ Zeilen von $C_{(\lambda)}$ für das c-Produkt zu entnehmen waren. Das allgemeine Vorzeichen ist $(-1)^{r-m-i_0}$, also weiß man, welches Vorzeichen innerhalb des Rahmens $\lfloor\ \rfloor$ zu setzen ist. Hier steht jetzt $\pm m_0^{i_0} m_1^{i_1} m_2^{i_2} \dots \cdot [m_h]$, das sind p Faktoren. Von ihnen wird ein bestimmtes Glied aus der Entwicklung von $M_{(\lambda)}^{(a)}$ gebildet. Jedes m_{h_1} der vorderen $p - 1$ Faktoren dieses Gliedes wird an seiner Stelle in der Determinante durch c_{h_1} ersetzt, daher sind genau die in Betracht kommenden Elemente c aus der Teildeterminante $(p-1)$-ten Grades bekannt, die zu dem durch $[m_h]$ gekennzeichneten Σ in (14ª.) gehört. Endlich wird $[m_h]$ ersetzt (vgl. Beweis zu (12.)) durch $c_h . C_{1^{r-p}} - c_{h+1} . C_{1^{r-p-1}} + \cdots$, wobei aus jedem C nur diejenigen c zu entnehmen sind, die noch zum vollen Produkt $c_1^{m_1} c_2^{m_2} \dots$ fehlen. So ist die Stellung aller Teile jenes Produkts in der Determinante festgelegt. Sei z. B. $(\lambda) = 5, 3^3, 2^4, 1^{12}$ und die Zahl (15ª.):

(II) $\qquad 7!\,\lfloor m_1 m_3^2 m_5 m_6 [m_4] \rfloor : m_1!\, m_2!\, m_3!\, m_4!\, m_5!\, m_6!,$

wobei nachher $m_1 = 6$; $m_2 = 1$; $m_3 = 2$; $m_4 = 1$; $m_5 = 2$; $m_6 = 1$, jedes andere $m_h = 0$ zu setzen ist, außer m_0. Hier ist $\mu = 34$; $r = 20$; $m = 13$; $p = 8$; $i_0 = 2$. Das allgemeine Produkt ist $c_0^7 \cdot c_1^6 \cdot c_2 \cdot c_3^2 \cdot c_4 \cdot c_5^2 \cdot c_6$. Es stimmt, daß $7! = (m - p + i_0)!$ ist. Hauptvorzeichen ist $(-1)^{r-m-i_0}$, hier -1; also ist aus der Determinante $(p-1)$-ten Grades das Glied $-c_0^2 c_1 c_3^2 c_5 c_6$ zu entnehmen, entsprechend $-m_0^2 m_1 m_3^2 m_5 m_6$. Der Faktor $[m_4]$ stammt aus der 6-ten Zeile. Statt $[m_4]$ ist zu setzen $c_4 \cdot C_{1^{11}} - c_5 \cdot C_{1^{11}}$, die folgenden Glieder verschwinden, schon $\lfloor m_6^2 \rfloor = m_6(m_6 - 1) = 0$. Aus jener 6-ten Zeile von $C_{(\lambda)}$ ist entweder c_4 oder c_5 zu entnehmen, dann aus den letzten 12 Zeilen im ersten Fall $c_0^5 c_1^5 c_2 c_5$, im zweiten $c_0^5 c_1^5 c_2 c_4$. Damit ist (I) genau bestimmt. Eine gute Probe bietet sich noch: (II) liefert den Wert $+84$; denn dort ist der eingerahmte Teil $= m_1 m_3 (m_3 - 1) m_5 m_6 [m_4 + (m_5 - 1) + (m_6 - 1)]$. Aus der Determinante $(p-1)$-ten Grades ergab sich der Faktor -1; aus $C_{1^{11}}$ ist -42 als Faktor von $c_0^5 c_1^5 c_2 c_5$ und aus $-C_{1^{11}}$ ist -42 als Faktor von $c_0^5 c_1^5 c_2 c_4$ nach (12ª.) zu berechnen; also $(-1) \cdot \{(-42) + (-42)\} = +84$, wie oben.

Vorstehende Überlegungen beweisen den engen Zusammenhang zwischen einem $K_{(\alpha)}$ aus (14ª.) und seinem Zahlenfaktor. Bei der vollen Übereinstimmung des Hauptteils von (14ª.) mit $M_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ bietet auch, so könnte man sagen, die Anschauung selbst Gewähr dafür, daß kein $K_{(\alpha)}$ aus (14ª.) übersehen und keines zu oft in Ansatz gebracht wird. Ein K, dessen Zeigerreihe (α) und dessen Entstehung aus der Determinante (14ª.) fest bestimmt sind, hat als Zahlenfaktor eine bestimmte ganze Zahl in Bruchform. Der Nenner ist das Produkt der Fakultäten von den Exponenten derjenigen Größen $c_1, \dots c_n$, welche K bilden; im Zähler steht neben dem Faktor $(m-p)!$ als weiterer Faktor das Glied aus $M_{(\lambda)}^{(\alpha)}$, welches genau jenem $K_{(\alpha)}$ entspricht. Das Vorzeichen ist $(-1)^{r-m}$. Werden also alle $K_{(\alpha)}$ mit gleicher Zeigerreihe, die aus (14ª.) durch die verschiedenen Zusammenstellungen der Elemente entstehen können, miteinander vereinigt, so bleibt bei dem neuen Zahlenfaktor das Vorzeichen, der Nenner und der Faktor $(m-p)!$ des Zählers unverändert; die andern Teile des Zählers bilden die Determinante $M_{(\lambda)}^{(\alpha)}$, in der jedoch jedes $m_h = 0$ zu setzen ist, dessen Zeiger h negativ oder zwar positiv, aber nicht in (α) vorhanden ist, m_0 ist beizubehalten. Hieraus erkennt man klar die Richtigkeit der Formel:

$$(17.) \qquad z_{(\lambda)}^{(\alpha)} = (-1)^{r-m} \cdot \frac{\lfloor (m-p)!\, M_{(\lambda)}^{(\alpha)} \rfloor}{m_1!\, m_2! \dots m_{\lambda_0+r-1}!},$$

wobei die Einrahmung hinweist auf folgende

(17ª.) Vorschrift: „Zur Auswertung von (17.) wird in $M_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ jedes m_h, dessen Zeiger negativ oder zwar positiv, aber in (α) nicht vorhanden ist, durch 0 ersetzt; m_0 wird beibehalten. Die Determinante $\lfloor M_{(\lambda)}^{(\alpha)} \rfloor$ wird dann unter Auflösung der Klammern [] nach Produkten der m_h entwickelt, aber für jede Potenz $m_h^{i_h}$ wird das Produkt $m_h(m_h-1) \dots (m_h - i_h + 1)$ geschrieben, auch für $h = 0$. Statt m_0 wird schließlich $-m+p-1$ und statt jedes anderen m_h der aus (α) ersichtliche Wert gesetzt. Ist $m < p$, etwa $m = p - i$, so hat $(m-p)!$ nur in Verbindung mit Potenzen von m_0 einen von Null verschiedenen Wert; es ist $\lfloor (m-p)! \cdot m_0^{i_0} \rfloor = \lfloor (-i)! \cdot m_0^{i_0} \rfloor = (-1)^{i_0} \cdot (i_0 - i)!$ zu nehmen, dabei $(i_0 - i)! = 1$ für $i_0 = i$, aber $= 0$ für $i_0 < i$."

Man könnte auch beim ersten Schritt m_0 und alle m_h mit positivem Zeiger beibehalten, nur die mit negativem Zeiger $= 0$ setzen, ganz zuletzt erst neben $m_0 = -m+p-1$ die Werte der m_h aus (α) berücksichtigen.

Dann erhielte man aus einer allgemeinen Formel die Werte sämtlicher $\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ für ein bestimmtes (λ). — Bei der Entwicklung von $M_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ ist bemerkenswert, daß jedem Element m_h der Determinante $(h \geqq 0)$ verschiedene Werte für die Rechnung beizulegen sind, je nach der Gruppe der andern Elemente, mit der jenes im Produkt zusammentritt. Welche Werte es sind, sagt die Vorschrift. — Jedes c-Produkt aus (14.) und (14ª.) hat das Gewicht μ. Dabei kommt das letzte Element der l-ten Zeile mit $\lambda_{l-1}-l+r$ in Rechnung. Aber in [] von Σ_{l-1} oder von der l-ten Zeile in $M_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ liegen die Zeigerwerte der gleichberechtigten Summanden zwischen $\lambda_{l-1}-l+r$ und $\lambda_{l-1}-l+p$, sie haben $r-p+1$ verschiedene Zahlenwerte. Somit kann das Gewicht der einzelnen m-Produkte aus $M_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ alle Werte zwischen μ und $\mu-r+p$ haben; es wird nur μ sein, wenn sämtliche λ_h größer als 1 sind.

Zwei Beispiele zu (17.): a) Sei $(\lambda)=6,3^4,1^{\mu-18}$ und $(\alpha)=7,4^{m_4},2^{m_2},1^{m_1}$, also $m_3=m_5=m_6=m_8=m_9$ usf. $=0$ und $\lfloor m_7^2 \rfloor = 0$. Dann wird:

$$\lfloor M_{(\lambda)}^{(\alpha)} \rfloor = m_2(m_2-1)m_4(m_4-1)m_7-2m_1m_2m_4(m_4-1)m_7-m_0m_4(m_4-1)(m_4-2)m_7.$$

Ist nun $m_1=5;\ m_2=1;\ m_4=2$ neben $m_7=1$, also $\mu=22$, so ist $\lfloor M_{(\lambda)}^{(\alpha)} \rfloor = -20$ und $\varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)} = \varkappa_{6,3^4,1^{14}}^{7,4^2,2,1^5} = (-1)^{9-9}\cdot\frac{(9-5)!\cdot(-20)}{5!\,2!} = -2$, wie S. 91. — Ist aber $m_1=8;\ m_2=3;\ m_4=5;\ m_7=1$, so ist $m=17;\ \mu=41;\ p=5;\ r=28;\ m_0=-13$; also $\lfloor M_{(\lambda)}^{(\alpha)} \rfloor = -60$ und $\varkappa_{6,3^4,1^{13}}^{7,4^5,2^3,1^8} = +990$. — b) der Faktor von $C_{19,9,2}$ in der Entwicklung von $T_{3^4,2^7,1^4}$ ist zu finden. Er ist $\varkappa_{3^2,2^7,1^{10}}^{3^4,2^7,1^4} = \varkappa_{2^7,1^{10}}^{3^2,2^7,1^4}$. Man entwickle $M_{(\lambda)}^{(\alpha)}$ nach den Elementen der letzten Spalte und durch Teildeterminanten 3-ten Grades, berücksichtige auch $\lfloor m_3^3 \rfloor = 0$; dann ist:

$$\lfloor M_{(\lambda)}^{(\alpha)} \rfloor = \lfloor m_2^7 + m_2^6 m_3 - 6m_1m_2^5m_3 - 5m_1m_2^4m_3^2 + 10m_1^2m_2^3m_3^2 + 5m_0m_2^4m_3^2 \rfloor$$

Weil $m_0=-7;\ m_1=4;\ m_2=7;\ m_3=2$, wird $\lfloor M_{(\lambda)}^{(\alpha)} \rfloor = -7.6.5.4.11.16.$ und der gesuchte Faktor $=-440$. — Nachprüfung der Beispiele nach (10.), nach (12.) und (13.) bestätigt die Werte.

Aus (8.) und (17.) folgt:

$$(18.) \qquad C_{(\lambda)} = \sum_{(\alpha)} (-1)^{r-m} \cdot \frac{\lfloor (m-p)! \cdot M_{(\lambda)}^{(\alpha)} \rfloor}{m_1!\,m_2! \ldots m_{\lambda_0+r-1}!} K_{(\alpha)};$$

aus (9.) und (17.) nebst (3ª.):

$$(19.) \quad T_{1^{m_1},2^{m_2},\ldots l^{m_l}} = \sum_{(\lambda)} (-1)^{\lambda_0-m} \cdot \frac{\lfloor (m-\lambda_1)! \cdot M_{(\lambda')}^{1^{m_1},2^{m_2},\ldots l^{m_l}} \rfloor}{m_1!\,m_2! \ldots m_l!} C_{(\lambda)}.$$

Auch könnte bei (9.) $T_{(\alpha)} = \sum_{(\lambda)} \varkappa_{(\lambda)}^{(\alpha)} . C_{(\lambda')}$ geschrieben und dies mit (17.) und (3ª.) vereinigt werden.

Als Sonderfall von (19.) erhält man für $T_{1^{m_1}, 2^{m_2}}$ genau den Wert auf S. 92; denn da ist $\lambda_0 = m + h$; $\lambda_1 = m_2 - h$; $\lfloor M^{(a)}_{(\lambda')} \rfloor = \lfloor m_2^{m_2 - h} \rfloor = m_2(m_2-1)\ldots(h+1)$. — Diesen einfachsten Fall von (19.) hat *Waring* um 1780 erledigt. Selbst die nächste Erweiterung $T_{1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}}$ wurde bisher nicht durchgeführt. Hier werden schon gewisse Schwierigkeiten des allgemeinen Falles bemerkbar, bei deren Überwindung gerade die Determinante wesentliche Dienste geleistet hat. So bilden die Formeln (17.), (18.), (19.) eine wertvolle Ergänzung zu mancherlei einfachen Beziehungen zwischen symmetrischen Funktionen, die auf Grund des Determinanten-Verfahrens früher schon*) aufgedeckt worden sind.

Vorstehende Abhandlung war schon längere Zeit im Besitz des Journals, als im Juli 1917 die Dissertation**) „Zur Hauptaufgabe der symmetrischen Funktionen“ von Herrn *Gustav Junge* erschien, worin eine Schlußformel anderer Art abgeleitet wird (S. 92, Gl. V). Nach Gedankengang und Ergebnissen sind die beiden Arbeiten ganz verschieden.

---

*) Vgl. namentlich dieses Journ. Bd. 93 und 132; dazu auch die Übersicht im Jahresbericht d. Dtsch. Math.-Ver. 16. Bd.

**) Berlin, Emil Ebering.

GENERAL LIBRARY
SEP 29 1919
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 148.

Heft 3/4.

Ausgegeben den 13. Mai.

Berlin W. 10
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1918.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 16 Mark.

Band 148. Heft 3/4.

Inhaltsverzeichnis.

Stäckel, P., Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen . . . . . Seite 101

Kürschák, Josef, Über spezielle Funktionenreihen . . . . . — 113

Pasch, M., Über quaternäre Linienkoordinaten . . . . . — 116

Schur, J., Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. (Fortsetzung.) . . . . . — 122

König, Robert, *Riemann*sche Funktionen- und Differential-Systeme in der Ebene. Arithmetischer Teil . . . . . — 146

Szász, Otto, Über die Approximation stetiger Funktionen durch *Bernoulli*sche Polynome . . . . . — 183

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

An die Herren Mitarbeiter!

Die Inanspruchnahme des größten Teils der Rohstoffe für die Papierfabrikation seitens der Heeresverwaltung hat die Kriegswirtschaftsstelle für die Papier verarbeitenden Gewerbe gezwungen, die Zuteilung von Papier für Druckwerke ganz erheblich einzuschränken und die Lieferung von Frei- und Werbeexemplaren von Zeitschriften und Zeitungen zu verbieten. So sieht sich der Verlag nicht mehr imstande, den Herren Mitarbeitern Sonderdrucke ihrer Beiträge in unbeschränkter Zahl zur Verfügung stellen zu können, er kann fortab jedem der Herren Verfasser bis auf weiteres nur noch die seither unberechnet zugestandenen 25 Separate liefern und bittet freundlichst, davon Kenntnis nehmen zu wollen.

In Hochachtung und Ergebenheit

Georg Reimer.

Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen.

Von Herrn *P. Stäckel* in Heidelberg.

1. Eine Reihe von Begriffen und Sätzen, die sich auf ganze positive und negative Zahlen beziehen, läßt sich auf ganze Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen mit ganzzahligen Koeffizienten übertragen. Das gilt vor allem für die Lehre von der Zerlegbarkeit der ganzen Zahlen, der eine Lehre von der Zerlegbarkeit der ganzen ganzzahligen Funktionen im Bereiche der ganzen Zahlen und der ganzen Funktionen entspricht; nach einem Satze von *Gauß**) und dessen Verallgemeinerung auf ganze Funktionen von beliebig vielen Veränderlichen**) folgt hieraus unmittelbar die Entscheidung über Zerlegbarkeit oder Unzerlegbarkeit im Bereiche der rationalen Zahlen und der rationalen Funktionen.

Während man auf die angedeutete Art von den ganzen Zahlen ausgehend zu ganzen Gebilden höherer Stufe aufsteigt, kann man auch den umgekehrten Weg einschlagen, d. h. in eine ganze ganzzahlige Funktion von n Veränderlichen für die Veränderlichen ganze ganzzahlige Funktionen von weniger als n Veränderlichen oder ganze Zahlen einsetzen und nach den Beziehungen fragen, die zwischen den Eigenschaften der ursprünglichen Funktion und den durch sie *dargestellten* ganzen ganzzahligen Funktionen und ganzen Zahlen bestehen.

---

*) *C. F. Gauß*, Disquisitiones arithmeticae, Leipzig 1801, art. 42; Werke, Bd. I, S. 34.

**) *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra, Bd. I, Braunschweig 1898, S. 75; kleine Ausgabe, Braunschweig 1912, S. 72.

Zu den nach dieser Richtung angestellten Untersuchungen soll im folgenden ein Beitrag geliefert werden.

2. Gegeben sei eine *ursprüngliche ganze ganzzahlige Funktion* einer Veränderlichen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

Bedeutet k eine ganze positive oder negative Zahl, so sind die Funktionswerte $f(k)$ wiederum ganze Zahlen, die, ebenso wie die Funktion $f(x)$ im Bereiche der ganzen Zahlen zerlegbar oder unzerlegbar ist, ihrerseits zusammengesetzte Zahlen oder Primzahlen (mit positivem oder negativem Vorzeichen) sein werden.

Wenn $f(x)$ *zerlegbar* ist, also etwa

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x),$$

so ist $f(k)$ im allgemeinen eine zusammengesetzte Zahl, denn $\varphi(k) \cdot \psi(k)$ ist dann und nur dann eine Primzahl, wenn gleichzeitig der eine Teiler eine Primzahl und der andere gleich ± 1 ist. Nun können die Gleichungen

$$\varphi(x) = \pm 1, \qquad \psi(x) = \pm 1$$

zusammengenommen höchstens $2n$ ganzzahlige Wurzeln besitzen, mithin gilt der Satz:

Satz 1. *Eine zerlegbare ganze ganzzahlige Funktion $f(x)$ vom Grade n kann höchstens $2n$ Primzahlen darstellen, und es werden daher, sobald der Betrag von k eine gewisse Grenze übersteigt, durch $f(k)$ nur zusammengesetzte Zahlen dargestellt.*

Wenn $f(x)$ *unzerlegbar* ist, so läßt sich leicht zeigen, daß dadurch ebenfalls unbegrenzt viele zusammengesetzte Zahlen dargestellt werden. Wählt man nämlich k so, daß $f(k) = K$ von 0 und ± 1 verschieden ist, so werden durch $f(\lambda K + k)$, wo λ eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, lauter ganze, durch K teilbare Zahlen dargestellt, und da es höchstens $3n$ ganze Zahlen λ gibt, für die $f(\lambda K + k)$ gleich 0 oder $\pm K$ wird, so gibt es unbegrenzt viele solche Zahlen λ, für die $f(\lambda K + k) = KL$ ist, wo L eine von 0 und ± 1 verschiedene ganze Zahl bedeutet. Diese Zahlen KL sind sicher zusammengesetzt. Man hat daher den Satz:

Satz 2. *Unter den ganzen Zahlen, die durch eine ganze ganzzahlige Funktion $f(x)$ dargestellt werden, gibt es, mag $f(x)$ zerlegbar oder unzerlegbar sein, stets unbegrenzt viele zusammengesetzte Zahlen.*

Hieraus folgt unmittelbar:

Satz 3. *Es gibt keine ganze ganzzahlige Funktion $f(x)$, die für ganzzahliges x lauter Primzahlen darstellt.*

3. Der Grundgedanke des Beweises für den Satz 2 rührt von *Euler* her, der am 28. Oktober 1752 an seinen Freund *Goldbach* schrieb:

„Jedoch gibt es gewiß keine series algebraica, deren omnes termini numeri primi seyn können. Denn es sey X der terminus indici x respondens, und daher A der terminus indici dato a respondens, so wird, wenn man nimmt $x = nA + a$, der terminus X divisibilis per A und also nicht primus.“ *)

Goldbach antwortete darauf am 18. November 1752, daß er diesen Satz bereits in einem früheren Briefe an *Euler* mitgeteilt habe**). In der Tat heißt es in dem Briefe vom 28. September 1743:

„Ob es zwar leicht ist zu demonstriren, daß keine formula algebraica hujusmodi

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$

lauter numeros primos geben kann, posita x pro exponente terminorum, die coefficientes a, b, c etc. mögen numeri integri quicunque seyn, so gibt es doch formulas, welche vor vielen andern eine Menge numerorum primorum in sich halten; dergleichen ist die series

$$xx + 19x - 19,$$

so in den ersten 47 terminis nur vier numeros non primos hat.“ ***)

---

*) Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIième siècle, publiée par *P.-H. Fuß*, St. Petersburg 1843, T. I, S. 589; vgl. auch *Euler*s Abhandlung: De numeris primis valde magnis, Nov. Comment. acad. Petrop. T. 9 (1762/3), 1764, S. 103; Opera omnia, Ser. I, vol. 3, S. 5.

**) Correspondance, T. I, S. 595.

***) Correspondance, T. I, S. 257. *Goldbach*s Behauptung ist richtig; die Ausnahmewerte von x sind die vier: 19, 25, 36, 38. Ein anderes Beispiel dieser Art hat *Euler* angegeben: die Funktion $x^2 - x + 41$ liefert für $x = 0, 1, 2, \ldots, 40$ nur Primzahlen; *L. Euler*, Extrait d'une lettre à *M. Bernoulli*, Nouv. Mém. Berlin (1772), 1774, S. 36, Opera omnia, Ser. I, vol. 3, S. 337. Vgl. auch *G. Frobenius*, Über quadratische Formen, die viele Primzahlen darstellen, Sitzungsber. der Berliner Akademie, 1912, S. 966.

4. Es gibt sogar *ursprüngliche unzerlegbare Funktionen* $f(x)$, die nur zusammengesetzte Zahlen darstellen. Um dies zu zeigen, werde die ursprüngliche Funktion gebildet

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-\alpha+1)(x-\alpha) + \lambda\alpha,$$

wo α irgendeine gegebene und λ eine noch willkürliche ganze Zahl bedeutet. Es ist klar, daß hier die Funktionswerte $f(k)$ ganze, durch α teilbare Zahlen sind, und man hat daher nur noch zu beweisen, daß $f(x)$ bei geeigneter Wahl von λ unzerlegbar ist. Dies folgt jedoch sofort aus einem allgemeinen Satz von *Hilbert**), wonach es stets auf unendlich viele Arten möglich ist, in einer unzerlegbaren ganzen ganzzahligen Funktion

$$F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$$

für die Veränderlichen $t, r, \ldots, q$ ganze Zahlen einzusetzen, sodaß dadurch $F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$ in eine unzerlegbare Funktion von $x, y, \ldots, w$ übergeht. Denn als Funktion der Veränderlichen x und λ angesehen ist $f(x)$ unzerlegbar.

Von hier aus wird man zu der Aufgabe geführt, den größten gemeinsamen Teiler aller durch eine ganze ganzzahlige Funktion $f(x)$ vom Grade n dargestellten ganzen Zahlen zu bestimmen. Sie wird in überraschend einfacher Weise durch einen Satz von *Hensel***) gelöst, der besagt, daß dieser größte gemeinsame Teiler gleich dem größten gemeinsamen Teiler von irgendwelchen $n+1$ Zahlen $f(k)$ ist, deren Argumente k unmittelbar aufeinander folgen, also zum Beispiel gleich dem größten gemeinsamen Teiler der $n+1$ Zahlen $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n)$.

5. Das Gegenstück zu den soeben betrachteten ganzen ganzzahligen Funktionen, die lauter zusammengesetzte Zahlen darstellen, bilden die Funktionen $f(x)$, die unbegrenzt viele Primzahlen in sich halten. Daß es solche Funktionen gibt, zeigen die linearen Funktionen $a + b\,x$, bei denen a und b teilerfremd sind***). Für sie gilt als Umkehrung des Satzes 1:

---

*) *D. Hilbert*, Über die Irreducibilität ganzer rationaler Funktionen mit ganzzahligen Coeffizienten, dieses Journal Bd. 110, 1892, S. 104.

**) *K. Hensel*, Über den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen, welche durch eine ganze Funktion von n Veränderlichen darstellbar sind, dieses Journal, Bd. 116, 1896, S. 350.

***) *G. Lejeune Dirichlet*, Beweis des Satzes, daß jede unbegrenzte arithmetische

Satz 4. *Wenn eine ganze ganzzahlige Funktion $f(x)$ unbegrenzt viele Primzahlen darstellt, so ist sie unzerlegbar.*

Die Unzerlegbarkeit von $f(x)$ läßt sich jedoch schon erschließen, wenn man die geringere Forderung stellt, daß jenseits einer gewissen, durch die Koeffizienten von $f(x)$ bestimmten Grenze für den Betrag von k mindestens eine Primzahl $f(k)$ vorhanden ist, d. h. es gilt der

Satz 5. *Jeder ganzen ganzzahligen Funktion $f(x)$ läßt sich eine positive ganze Zahl S von der Beschaffenheit zuordnen, daß $f(x)$ im Bereiche der ganzen Zahlen unzerlegbar ist, falls es eine ganze Zahl k von einem Betrage größer als S gibt, für die $f(k)$ eine Primzahl wird.*

Es möge noch hervorgehoben werden, daß die in dem Satze 5 ausgesprochene Bedingung hinreichend, aber nicht notwendig ist, d. h., falls es keine solche Zahl k gibt, bleibt es unentschieden, ob $f(x)$ zerlegbar ist oder nicht.

Um den Satz 5 zu beweisen, hat man nur zu beachten, daß *erstens* nach einem Satze von *Kronecker**) als mögliche echte Teiler einer gegebenen ganzen ganzzahligen Funktion $f(x)$ nur eine endliche Anzahl ganzer ganzzahliger Funktionen $\varphi(x)$ in Betracht kommt, und daß alsdann *zweitens* der Betrag der dem Betrage nach größten ganzzahligen Wurzel der Gleichungen

$$\varphi(x) = \pm 1$$

einen Wert von S liefert.

Wenn dieses Verfahren nicht nur das Vorhandensein von S sicherstellt, sondern auch nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einem Wert von S führt, so hat es doch den wesentlichen Mangel, daß mit der Aufstellung der Funktionen $\varphi(x)$ die Frage nach der Zerlegbarkeit oder Unzerlegbarkeit der Funktion $f(x)$ im Grunde schon entschieden ist. Es ist daher wichtig, daß man einen Wert von S unmittelbar aus den Koeffizienten von $f(x)$ herleiten kann; freilich wird der auf diesem Wege er-

---

Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält, Abhandlungen der Berliner Akademie, Berlin 1837, S. 45; Werke, Bd. I, S. 313.

*) *L. Kronecker*, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen, dieses Journal, Bd. 92, 1882, S. 10—12. Einen auf anderer Grundlage beruhenden Beweis hat *J. König* gegeben, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen, Leipzig 1903, S. 128.

haltene Wert im allgemeinen größer ausfallen als der Betrag jener ganzzahligen größten Wurzel der Gleichungen $\varphi(x) = \pm 1$. Man kann nämlich aus den Koeffizienten von $f(x)$ zunächst eine obere Grenze G für die Beträge der Koeffizienten herleiten, die in der Gesamtheit der Funktionen $\varphi(x)$ auftreten, und darauf eine obere Grenze S für die Wurzeln aller Gleichungen

$$\omega(x) = \pm 1$$

gewinnen, deren linke Seiten entstehen, wenn man alle ganzen ganzzahligen Funktionen von x der Grade $\nu \leqq n$ bildet, deren Koeffizienten dem Betrage nach die Grenze G nicht übersteigen.

6. Die Bestimmung einer oberen Grenze G für die Beträge der Koeffizienten in den Funktionen $\varphi(x)$ ist leicht, wenn man den Fundamentalsatz über die Wurzeln algebraischer Gleichungen voraussetzen will. Dies erscheint jedoch bei Untersuchungen, die sich im Gebiete der ganzen Zahlen bewegen, unzulässig. Einer brieflichen Mitteilung *Hensel*s entnehme ich ein Verfahren, bei dem man aus dem Bereiche der ganzen Zahlen nicht heraustritt*). Es verdient um so mehr Beachtung, als daraus ein neuer Beweis für den *Kronecker*schen Satz hervorgeht.

Hensel beweist zunächst einen Hilfssatz über die Größe der Elemente eines adjungierten Systems, den er wiederholt angewandt hat, der sich aber auch schon in einer Abhandlung von *Hurwitz* aus dem Jahre 1897 findet**).

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ irgendwelche von einander verschiedene ganze Zahlen, deren Beträge eine obere Grenze X haben, und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ irgendwelche reelle Größen, für die Y eine obere Grenze der Beträge bilde. Dann sollen für die Beträge der n Unbekannten $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, die den linearen Gleichungen

$$u_0 + u_1 x_\nu + u_2 x_\nu^2 + \cdots + u_{n-2} x_\nu^{n-2} + u_{n-1} x_\nu^{n-1} = y_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, obere Grenzen ermittelt werden.

---

*) Auch die Sätze von *König* geben die Grundlage für ein solches Verfahren; man müßte zu diesem Zwecke die Koeffizienten $k_{\varrho\sigma}$ in dem *Dedekind*schen Hilfssatz (a. a. O., S. 76) ermitteln oder doch abschätzen, was jedoch bis jetzt noch nicht durchgeführt worden zu sein scheint.

**) *A. Hurwitz*, Ueber lineare Formen mit ganzzahligen Variabeln, Göttinger Nachrichten, 1897, S. 139.

Die Unbekannten ergeben sich als Quotienten von Determinanten der Ordnung n mit dem gemeinsamen Nenner

$$D = |x_\nu^{\varrho-1}| \qquad (\nu, \varrho = 1, 2, \ldots, n).$$

Man überzeugt sich sofort, daß

$$D \geqq |(|x_\nu|)^{\varrho-1}| = \Delta$$

ist. Jede Unterdeterminante D' von D besteht aus $(n-1)!$ Gliedern

$$\pm x_\alpha^\lambda x_\beta^\mu x_\gamma^\nu \ldots x_\varkappa^\sigma,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa$ irgendwelche $n-1$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, n$ und $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \sigma$ irgendwelche $n-1$ Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ bedeuten. Mithin ist

$$|D'| \leqq (n-1)!\, X^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

Hieraus folgt weiter, daß der Betrag einer jeden der Determinanten, die in den Zählern jener Quotienten auftreten,

$$\leqq n!\, X^{\frac{1}{2}n(n-1)}\, Y$$

ist, und man erhält schließlich die gesuchten Ungleichheiten in der Gestalt

$$|u_\nu| \leqq \frac{n!\, X^{\frac{1}{2}n(n-1)}\, Y}{\Delta}.$$

Nach dieser Vorbereitung betrachte man die ganze ganzzahlige Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Wenn sie im Bereiche der ganzen Zahlen zerlegbar ist, so läßt sich jeder ihrer Teiler in der Form schreiben

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_{n-1} x^{n-1};$$

hierbei kann ein Teil der Koeffizienten $u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots$ den Wert Null haben. Für x mögen der Reihe nach die ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $f(x)$ und $\varphi(x)$ eingesetzt werden. Dann sind die ganzen Zahlen $\varphi(x_\nu) = y_\nu$ notwendig Teiler der entsprechenden ganzen Zahlen $f(x_\nu)$, und daher ist, falls $f(x_\nu)$ von Null verschieden ist,

$$|y_\nu| \leqq |f(x_\nu)| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Wäre aber $f(x_\nu) = 0$, so hätte $f(x)$ den Teiler $x - x_\nu$ und wäre schon zerlegt.

Als obere Grenze Y darf man also eine obere Grenze der Zahlen $|f(x_\nu)|$ nehmen. Eine solche ergibt sich mittels der oberen Schranke A für die Beträge der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$; denn es ist für $n > 4$:

$$|f(x_\nu)| \leqq A(1 + X + X^2 + \cdots + X^n) \leqq A X^{n+1},$$

weil X eine positive ganze Zahl und für $n \geqq 4$ mindestens gleich zwei ist. Nach dem vorher bewiesenen Hilfssatz ist daher für $n \geqq 4$:

$$|u_\nu| \leqq \frac{n!\, A\, X^{\frac{1}{2}(n^2+n+2)}}{\Delta},$$

und damit ist eine obere Grenze für die Beträge der Koeffizienten in den möglichen Teilern $\varphi(x)$ von $f(x)$ ermittelt.

Wählt man im besonderen

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ \ldots,\ x_n = n-1,$$

so wird

$$X = n-1$$

und

$$\Delta = 1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!,$$

folglich ist für $n \geqq 4$:

$$|u_\nu| \leqq \frac{A\, n!\,(n-1)^{\frac{1}{2}(n^2+n+2)}}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!} = G.$$

Die Grenze G könnte noch verkleinert werden, zum Beispiel durch die Bemerkung, daß man für die Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Werte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ nehmen darf.

7. Weil die echten Teiler von $f(x)$, falls es deren überhaupt gibt, unter den ganzen ganzzahligen Funktionen $\omega(x)$ vom Grade $\nu \leqq n-1$ enthalten sind, deren Koeffizienten dem Betrage nach $\leqq G$ sind, hat man zur Bestimmung von S eine obere Grenze für die Beträge der *ganzzahligen* Wurzeln der Gleichungen

$$\omega(x) = \pm 1$$

aufzusuchen. Eine solche Grenze wird jedenfalls durch jede obere Grenze für die Beträge *aller* Wurzeln dieser Gleichungen gegeben*), und dazu gelangt man folgendermaßen.

Es sei

$$\omega(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{\nu-1} x^{\nu-1} + b_\nu x^\nu;$$

b_ν darf als von Null verschieden vorausgesetzt werden. Dividiert man $\omega(x)$ durch die ganze Zahl b_ν, so entsteht eine ganze Funktion mit ratio-

---

*) Die folgenden Überlegungen lassen sich leicht so umgestalten, daß man nicht von Wurzeln schlechthin spricht, sondern im Bereiche der ganzen Zahlen bleibt; der Kürze wegen möge jedoch diese Freiheit gestattet werden.

nalen Koeffizienten, die dem Betrage nach ebenfalls $\leqq G$ sind, und es läßt sich daher die Gleichung $\omega(x) = \pm 1$ in der Form schreiben

$$x^\nu + c_{\nu-1}\, x^{\nu-1} + \cdots + c_1\, x + c_0 = 0,$$

worin die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_{\nu-1}$ dem Betrage nach $\leqq G+1$ sind. Ist jetzt $|x| = \xi$, so wird

$$|c_{\nu-1}\, x^{\nu-1} + \cdots + c_1\, x + c_0| \leqq (G+1)\,\frac{\xi^\nu - 1}{\xi - 1},$$

und aus dieser Ungleichheit folgt sofort, daß keine Wurzel der Gleichung $\omega(x) = \pm 1$ dem Betrage nach $\geqq G+2$ sein kann.

Die Ergebnisse der vorhergehenden Betrachtungen lassen sich zusammenfassen in den

Satz 6. *Wenn die Koeffizienten einer ganzen ganzzahligen Funktion*

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n,$$

deren Grad $n \geqq 4$ ist, dem Betrage nach $\leqq A$ sind und wenn für eine ganze Zahl k, deren Betrag größer ist als

$$S = 2 + \frac{A\, n!\, (n-1)^{\frac{1}{2}(n^2+n+2)}}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!},$$

durch $f(k)$ eine Primzahl dargestellt wird, so ist $f(x)$ im Bereiche der ganzen Zahlen unzerlegbar.

Für $n = 2$ und $n = 3$ gelten ähnliche Sätze, deren Aufstellung keine Schwierigkeiten macht.

8. Die in dem Satze 6 auftretende Größe S läßt sich zwar nach der am Schlusse von Nr. 6 gemachten Bemerkung durch eine kleinere Größe ersetzen, aber auch im günstigsten Falle liefert die im vorhergehenden angewandte Schlußweise schon bei mäßiger Höhe des Grades beträchtliche Werte von S. Um so bemerkenswerter erscheint ein Satz, den mir *O. Gmelin* in Weyer (Rheinland) mitgeteilt hat. Er lautet:

Es sei $f(x)$ eine ganze Funktion beliebigen Grades, deren Koeffizienten sämtlich nichtnegative ganze Zahlen sind; A sei die obere Schranke der Koeffizienten. Wenn man dann eine ganze Zahl k angeben kann, deren Betrag größer ist als

$$A + 1,$$

so daß $f(k)$ eine Primzahl wird, so hat $f(x)$ im Bereiche der ganzen Zahlen weder einen Teiler ersten noch einen Teiler zweiten Grades.

Hieraus folgt unmittelbar, daß unter denselben Voraussetzungen eine ganze Funktion, deren Grad fünf nicht überschreitet, im Bereiche der ganzen Zahlen *unzerlegbar* ist.

Der Beweis *Gmelins* bewegt sich durch eine lange Folge von Fallunterscheidungen und ist so umständlich, daß er hier nicht wiedergegeben werden kann. Dagegen ist es mir gelungen, die Frage nach den *linearen* ganzzahligen Teilern für ganze Funktionen mit *beliebigen* ganzzahligen Koeffizienten in verhältnismäßig einfacher Weise zu erledigen. Es gilt nämlich der Satz:

Satz 7. *Wenn die Koeffizienten einer ganzen ganzzahligen Funktion*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

dem Betrage nach $\leqq A$ *sind und wenn für eine ganze Zahl* k*, deren Betrag größer ist als*

$$A + 1,$$

durch $f(k)$ *eine Primzahl dargestellt wird, so kann* $f(x)$ *keinen linearen ganzzahligen Teiler enthalten.*

Zum Beweise werde angenommen, daß

$$f(x) = (b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1})(c_0 + c_1 x)$$

sei; dabei sind b_{n-1} und c_1 von Null verschieden. Es gilt dann zu zeigen, daß hieraus ein Widerspruch gegen die Voraussetzungen hervorgeht.

Man darf augenscheinlich a_0, b_0, c_0 als positiv voraussetzen. Dann folgen aus der Gleichung

$$a_0 = b_0 c_0$$

die Ungleichheiten

$$b_0 \leqq a_0 \leqq A, \qquad c_0 \leqq a_0 \leqq A.$$

Ferner ist

$$a_n = b_{n-1} c_1$$

und daher, weil a_n von Null verschieden ist:

$$|b_{n-1}| \leqq a_n \leqq A, \qquad |c_1| \leqq a_n \leqq A.$$

Ist jetzt $f(k)$ gleich einer Primzahl p (mit positivem oder negativem Vorzeichen), so muß entweder

$$b_0 + b_1 k + \cdots + b_{n-1} k^{n-1} = \pm p, \qquad c_0 + c_1 k = \pm 1$$

oder

$$b_0 + b_1 k + \cdots + b_{n-1} k^{n-1} = \pm 1, \qquad c_0 + c_1 k = \pm p$$

sein.

Daß der erste Fall auf einen Widerspruch führt, ist leicht zu erkennen. Denn es müßte

$$c_1 k = \pm 1 - c_0$$

sein, während der Betrag der linken Seite $\geqq |k| > A + 1$, der Betrag der rechten Seite aber $\leqq A + 1$ ist. Hiermit sind die Funktionen zweiten Grades bereits erledigt, und es darf im folgenden $n \geqq 3$ angenommen werden.

Mehr Umstände macht der zweite Fall. Um hier den Widerspruch nachzuweisen, soll gezeigt werden, daß die Gleichung

$$a_0 + a_1 k + \cdots + a_n k^n = \pm (c_0 + c_1 k)$$

mit den Voraussetzungen unvereinbar ist.

Zur Abkürzung möge der Betrag von k mit $\varkappa$ bezeichnet werden. Dann ist die rechte Seite dem Betrage nach

$$\leqq A(1 + \varkappa).$$

Auf der linken Seite ist zunächst

$$|a_0 + a_1 k + \cdots + a_{n-1} k^{n-1}| \leqq A \frac{\varkappa^n - 1}{\varkappa - 1}.$$

Mithin ist der Betrag der linken Seite

$$\geqq |a_n| \varkappa^n - A \frac{\varkappa^n - 1}{\varkappa - 1}$$

$$\geqq \varkappa^n - A \frac{\varkappa^n - 1}{\varkappa - 1},$$

vorausgesetzt, daß die Größe auf der rechten Seite der Ungleichheit positiv ist; das ist aber für $\varkappa \geqq A + 1$ unmittelbar ersichtlich. Demnach müßte

$$A(1 + \varkappa) \geqq \varkappa^n - A \frac{\varkappa^n - 1}{\varkappa - 1}$$

oder

$$g(\varkappa) = \varkappa^{n+1} - (A + 1) \varkappa^n - A\varkappa^2 + 2A \leqq 0$$

sein. Daß dies für $\varkappa \geqq A + 2$ nicht der Fall ist, daß vielmehr für solche Werte von $\varkappa$ die Funktion $g(\varkappa)$ positiv ausfällt, wird augenscheinlich, wenn man sie in der Form schreibt:

$$g(\varkappa) = \varkappa^2 [\varkappa^{n-2} (\varkappa - (A + 1)) - A] + 2A.$$

Denn $\varkappa^{n-2} (\varkappa - (A + 1))$ hat die Eigenschaft, für $\varkappa > A + 1$ positiv zu sein und mit wachsendem $\varkappa$ beständig zu wachsen, und der Ausdruck,

der daraus durch Wegnahme von A entsteht, hat für $x = A + 2$ den positiven Wert

$$(A+2)^{n-2} - A \qquad (n \geqq 3),$$

folglich ist $g(x)$ *selbst für* $x \geqq A+2$ *positiv.* Damit ist der Beweis vollendet.

Es ist zu vermuten, daß der Satz 7 nur das erste Glied einer Kette von ähnlichen Sätzen ist.

Heidelberg, im November 1916.

Über spezielle Funktionenreihen.

Von Herrn *Josef Kürschák* in Budapest.

Jeder Reihe

$$(1.) \qquad x g_1(x) + x^2 g_2(x) + \cdots + x^n g_n(x) + \cdots,$$

wo $g_1(x), g_2(x), \ldots$ *Polynome* sind, entspricht rein *formal* eine Potenzreihe, die wir so erhalten, daß wir jedes $x^n g_n(x)$ nach den Potenzen von x entwickeln und dann die Glieder mit gleichen Exponenten addieren. Die Addition dieser Glieder ist *immer* ausführbar, da jede Potenz von x nur in einer endlichen Anzahl von Gliedern erscheint. Der Reihe (1.) und der ähnlich beschaffenen Reihe

$$(2.) \qquad x G_1(x) + x^2 G_2(x) + \cdots + x^n G_n(x) + \cdots$$

entspricht dann und nur dann dieselbe Potenzreihe, wenn die Differenz von

$$s_n(x) = x g_1(x) + \cdots + x^n g_n(x)$$

und

$$S_n(x) = x G_1(x) + \cdots + x^n G_n(x)$$

für jede positive ganze Zahl n durch x^{n+1} teilbar ist. Wir sagen dann, daß (1.) und (2.) *formal* gleich sind. Insbesondere ist also (1.) mit der entsprechenden Potenzreihe formal gleich.

Die *formale* Gleichheit hat mit der Gleichheit *der Größe nach* gar nichts zu tun. Um dies zu zeigen, soll hier das folgende funktionentheoretische Analogon eines bekannten arithmetischen Satzes *) bewiesen werden:

---

*) *K. Hensel*, *Theorie der algebraischen Zahlen*, Leipzig (1908), Seite 41—43.

Sind die beiden Potenzreihen

$$A(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \qquad B(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

wie immer gewählt worden, so kann stets eine solche Reihe von der Gestalt (1.) *bestimmt werden, die*

1) *formal gleich* $A(x)$ *ist,*

2) *überall, wo* $B(x)$ *konvergiert, der Größe nach gleich* $B(x)$ *ist.*

Der ersten Forderung genügt jede Reihe, für welche die Summe ihrer ersten n Glieder in der Gestalt

$$s_n(x) = A_n(x) + x^{n+1}\gamma_n(x)$$

dargestellt werden kann, wo

$$A_n(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

ist und $\gamma_n(x)$ ein Polynom bedeutet.

Um auch die zweite Forderung zu befriedigen, genügt es, $\gamma_n(x)$ so zu bestimmen, daß für jeden endlichen Wert von x

$$\lim_{n=\infty} [B_n(x) - A_n(x) - x^{n+1}\gamma_n(x)] = 0 \qquad (3.)$$

sei. An der Stelle $x = 0$ trifft dies immer zu. Um dasselbe auch für jeden anderen Wert von x zu erreichen, benutzen wir den folgenden Satz von Herrn *C. Runge**):

Liegen x_1 und x_2 im Innern eines zusammenhängenden Gebietes und wird eine rationale Funktion $R(x)$ nur in x_1 unendlich, so kann man eine andere rationale Funktion bilden, welche nur in x_2 unendlich wird und für alle Werte von x außerhalb oder auf der Grenze jenes Gebietes beliebig genau mit $R(x)$ übereinstimmt.

Hier kann x_1 oder x_2 auch im Unendlichen liegen. Bei uns wird $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$ sein.

Bei der Anwendung des zitierten Satzes schneiden wir von der Ebene am rechten Ufer der imaginären Achse einen Streifen von der Breite $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ heraus. Außerdem schneiden wir von der Ebene alles ab, was zum Anfangspunkte näher als $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ oder vom Anfangspunkte weiter als n liegt. Was dann von der Ebene übrigbleibt, möge mit U_n bezeichnet werden.

---

*) *Acta mathematica*, Bd. VI. (1885), Seite 236—237.

Die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \infty$ liegen im abgeschnittenen, zusammenhängenden Gebiete.

Nach dem *Runge*schen Satze läßt sich eine ganze rationale Funktion $\gamma_n(x)$ bilden, welche im Innern und auf der Grenze von U_n die Ungleichheit

$$\left| \frac{B_n(x) - A_n(x)}{x^{n+1}} - \gamma_n(x) \right| < \frac{1}{n^{n+2}}$$

und somit auch die Ungleichheit

$$(4.) \qquad |B_n(x) - A_n(x) - x^{n+1}\gamma_n(x)| < \frac{1}{n}$$

befriedigen wird.

Bedeutet x eine beliebige, von Null verschiedene, endliche Stelle, so wird diese für ein hinreichend großes n im Innern oder auf der Grenze von U_n liegen. Von diesem Werte von n ab wird x die Ungleichheit (4.) befriedigen; daraus ist aber die Richtigkeit von (3.) unmittelbar ersichtlich.

Daß $B(x)$ eine Potenzreihe ist, wurde hier nicht ausgenutzt; der Satz und sein Beweis gilt auch für den Fall, wenn $B(x)$ eine beliebige Polynomreihe bedeutet, die an der Stelle $x = 0$ konvergent ist und für die $B(0) = 0$.

Über quaternäre Linienkoordinaten.

Von Herrn *M. Pasch* in *Gießen.*

In dem Aufsatz: Zur Theorie der linearen Komplexe, dieses Journal 1873 Bd. 75, habe ich die einfachsten Formeln der Liniengeometrie abgeleitet. Eine neuerdings aufgeworfene Frage*) veranlaßt mich, auf den Gegenstand zurückzukommen. Es liegen quaternäre Punkt- und Ebenenkoordinaten zugrunde; die damit gebildeten Koordinaten der Geraden nenne ich *quaternäre Linienkoordinaten* zum Unterschied von den ternären in der Ebene.

Vorausgeschickt werde eine Bemerkung, die den Zusammenhang mit binären und ternären Koordinaten betrifft. Sind in einer Geraden zwei Fundamentalpunkte A, B und ein Einheitspunkt G festgelegt, und hat dann in der Geraden AB ein Punkt z die homogenen Koordinaten $z_1 | z_2$, so ist $z_1 : z_2$ das Doppelverhältnis $(ABGz)$. Sind in einer Ebene drei $\mathfrak{F}$-Punkte A, B, C und ein $\mathfrak{E}$-Punkt F festgelegt, so kann man etwa für die $\mathfrak{F}$-Linie AB die Punkte A, B als $\mathfrak{F}$-Punkte und die Projektion des Punktes F aus C als $\mathfrak{E}$-Punkt G festlegen. Sind dann $y_1 | y_2 | y_3$ die homogenen Koordinaten eines Punktes y in der Ebene ABC, so sind $y_1 | y_2$ in der Geraden AB die Koordinaten der Projektion von y aus C, falls nicht $y_1 = y_2 = 0$, d. h. $y = C$. Sind endlich vier $\mathfrak{F}$-Punkte A, B, C, D und ein $\mathfrak{E}$-Punkt E festgelegt, so kann man etwa für die $\mathfrak{F}$-Ebene ABC die Punkte A, B, C als $\mathfrak{F}$-Punkte und die Projektion des Punktes E aus D als $\mathfrak{E}$-Punkt F festlegen. Sind dann $x_1 | x_2 | x_3 | x_4$ die homogenen Koordinaten eines Punktes x, so sind $x_1 | x_2 | x_3$ in der Ebene ABC die Koordinaten der Projektion von x aus D,

*) *R. Sturm*, Archiv der Mathematik und Physik 1916 Bd. 24 S. 17—19.

falls nicht $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, d. h. $x = D$; $x_1 | x_2$ sind in der Geraden AB die Koordinaten der Projektion von x mittelst der Geraden CD, falls nicht $x_1 = x_2 = 0$, d. h. x auf CD.

§ 1. Allgemeine Hülfsmittel.

1. Wie in dem Aufsatz von 1873, wähle ich die Bezeichnungen:

$$\alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i = (\alpha\beta)_{ik} \text{ für } i, k = 1, 2, 3, 4,$$
$$(\alpha\beta)_{12} = (\alpha\beta)_1, \quad (\alpha\beta)_{13} = (\alpha\beta)_2, \quad (\alpha\beta)_{14} = (\alpha\beta)_3,$$
$$(\alpha\beta)_{34} = (\alpha\beta)_4, \quad (\alpha\beta)_{42} = (\alpha\beta)_5, \quad (\alpha\beta)_{23} = (\alpha\beta)_6.$$

In einem quaternären System $ABCDE$ hat die Gerade $\mathfrak{x}$ sechs homogene Koordinaten $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_6$, und zwar kann man, wenn λ und μ zwei Punkte der Geraden, l und m zwei ihrer Ebenen sind, die Koordinaten der Geraden auf zwei Arten darstellen:

$$\mathfrak{x}_1 | \ldots | \mathfrak{x}_6 = (\lambda\mu)_1 | \ldots | (\lambda\mu)_6,$$
$$\mathfrak{x}_1 | \ldots | \mathfrak{x}_6 = (lm)_4 | (lm)_5 | (lm)_6 | (lm)_1 | (lm)_2 | (lm)_3.$$

Jede weitere Darstellung von $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_6$ in der Form: $\mathfrak{x}_i = (\varrho\sigma)_i$ hat zur Folge, daß identisch in den x:

$$\Sigma \pm \lambda_1\mu_2\varrho_3 x_4 = \Sigma \pm \varrho_1\sigma_2\varrho_3 x_4 = 0,$$

also ϱ auf der Geraden $\lambda\mu$, ebenso σ, d. h., daß die Gerade $\varrho\sigma$ mit $\mathfrak{x}$ zusammenfällt. Darauf beruht es, daß durch die Koordinaten $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_6$ allemal nur *eine* Gerade bestimmt wird.

Die Linienkoordinaten befriedigen die Gleichung:

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_5 + \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_6 = 0.$$

Wie umgekehrt sechs nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen, die diese Gleichung befriedigen, stets zu einer Geraden führen, wird weiter unten (in Nr. 3) gezeigt.

Bezeichnet man den Ausdruck

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_4 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_5 + \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_6 + \mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{x}_5\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{x}_6\mathfrak{y}_3 \text{ mit } (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

so ist identisch

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{y}, \mathfrak{x}), \quad \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_5 + \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_6 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}).$$

2. Sechs homogene Veränderliche $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_6$ kann man in der Liniengeometrie als *Koordinaten eines linearen Komplexes* $\mathfrak{x}$ auffassen. Eine Gerade wird dann als „spezieller" linearer Komplex bezeichnet; siehe § 1

Nr. 4 des Aufsatzes von 1873. Aus § 3 desselben Aufsatzes entnehme ich die Bezeichnungen:

$$\begin{array}{l|l}
E_1(\mathfrak{x},\alpha) = * - \alpha_2\mathfrak{x}_4 - \alpha_3\mathfrak{x}_5 - \alpha_4\mathfrak{x}_6 & \Pi_1(\mathfrak{x},a) = * - a_2\mathfrak{x}_1 - a_3\mathfrak{x}_2 - a_4\mathfrak{x}_3 \\
E_2(\mathfrak{x},\alpha) = \alpha_1\mathfrak{x}_4 * - \alpha_3\mathfrak{x}_3 + \alpha_4\mathfrak{x}_2 & \Pi_2(\mathfrak{x},a) = a_1\mathfrak{x}_1 * - a_3\mathfrak{x}_6 + a_4\mathfrak{x}_5 \\
E_3(\mathfrak{x},\alpha) = \alpha_1\mathfrak{x}_5 + \alpha_2\mathfrak{x}_3 * - \alpha_4\mathfrak{x}_1 & \Pi_3(\mathfrak{x},a) = a_1\mathfrak{x}_2 + a_2\mathfrak{x}_6 * - a_4\mathfrak{x}_4 \\
E_4(\mathfrak{x},\alpha) = \alpha_1\mathfrak{x}_6 - \alpha_2\mathfrak{x}_2 + \alpha_3\mathfrak{x}_1 * & \Pi_4(\mathfrak{x},a) = a_1\mathfrak{x}_3 - a_2\mathfrak{x}_5 + a_3\mathfrak{x}_4 *
\end{array}$$

Solange sie nicht gleichzeitig verschwinden, sind die vier ersten Ausdrücke Koordinaten einer Ebene $E(\mathfrak{x},\alpha)$, die vier letzten Ausdrücke Koordinaten eines Punktes $\Pi(\mathfrak{x},a)$; siehe dazu § 2 Nr. 5 des vorliegenden Aufsatzes. Im Fall des „speziellen" Komplexes ist der Punkt $\Pi(\mathfrak{x},a)$ der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{x}$ mit der Ebene a, die Ebene $E(\mathfrak{x},\alpha)$ die Verbindungsebene der Geraden $\mathfrak{x}$ mit dem Punkt α.

Aus den §§ 3 und 4 des Aufsatzes von 1873 entnehme ich endlich folgende Identitäten, in denen $i = 1, \ldots, 4$ und $k = 1, \ldots, 6$:

$$\text{(1.)} \qquad \Sigma\alpha_i E_i(\mathfrak{x},\alpha) = 0, \quad \Sigma a_i \Pi_i(\mathfrak{x},a) = 0,$$

$$\text{(2.)} \qquad \Sigma E_i(\mathfrak{x},\alpha)\Pi_i(\mathfrak{x},a) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x},\mathfrak{x})a_a, \text{ wo } a_a = \Sigma a_i\alpha_i,$$

$$\text{(3.)} \qquad \Sigma E_i(\mathfrak{x},\alpha)\Pi_i(\mathfrak{y},a) + \Sigma E_i(\mathfrak{y},\alpha)\Pi_i(\mathfrak{x},a) = (\mathfrak{x},\mathfrak{y})a_a,$$

$$\text{(4.)} \qquad (\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = (\mathfrak{x},\mathfrak{y})\Sigma\mathfrak{x}_k(ab)_k - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x},\mathfrak{x})\Sigma\mathfrak{y}_k(ab)_k,$$

wo

$$\mathfrak{z}_k = (\Pi(\mathfrak{x},a), \Pi(\mathfrak{x},b))_k.$$

3. Ich erledige jetzt die in Nr. 1 offen gebliebene Frage, wie homogene Veränderliche $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_6$, für die $(\mathfrak{x},\mathfrak{x})$ verschwindet, sich stets als Linienkoordinaten erweisen.

Für solche Werte ist nach (4.) identisch in $a, b, \mathfrak{y}$:

$$(\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = (\mathfrak{x},\mathfrak{y})r, \text{ wo } r = \Sigma\mathfrak{x}_k(ab)_k.$$

Folglich ist identisch in a und b:

$$r\mathfrak{x}_k = (\Pi(\mathfrak{x},a), \Pi(\mathfrak{x},b))_k \text{ für } k = 1, \ldots, 6.$$

Es ist aber nicht möglich, daß r identisch in a und b verschwindet, oder alle $\Pi_i(\mathfrak{x},a)$ identisch in a, oder alle $\Pi_i(\mathfrak{x},b)$ identisch in b. Ich kann daher a und b so wählen, daß weder r verschwindet, noch alle $\Pi_i(\mathfrak{x},a)$ gleichzeitig verschwinden, noch alle $\Pi_i(\mathfrak{x},b)$. So gelange ich zu zwei Punkten $\Pi(\mathfrak{x},a)$, $\Pi(\mathfrak{x},b)$; die Verbindungslinie dieser Punkte hat die Koordinaten $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_6$.

Im allgemeinen darf man irgend fünf der Werte $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_6$ beliebig annehmen, etwa $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_5$; durch die Gleichung $(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) = 0$ wird dann $\mathfrak{x}_6$ be-

stimmt. Dieser Wert bleibt jedoch unbestimmt, wenn $\mathfrak{x}_3 = 0$ angenommen wurde; überdies durften dann $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_4, \mathfrak{x}_5$ nur so angenommen werden, daß $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_5 = 0$.

4. Der Punkt $\Pi(\mathfrak{x}, u)$ liegt in der i-ten $\mathfrak{F}$-Ebene, wenn $\Pi_i(\mathfrak{x}, u) = 0$. Fällt also eine Gerade $\mathfrak{x}$ ganz in die i-te $\mathfrak{F}$-Ebene, so ist $\Pi(\mathfrak{x}, u) \equiv 0$. Anderenfalls stellt die Gleichung $\Pi_i(\mathfrak{x}, u) = 0$ den Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{x}$ mit der i-ten $\mathfrak{F}$-Ebene dar.

Die Ebene $E(\mathfrak{x}, x)$ geht durch den i-ten $\mathfrak{F}$-Punkt, wenn $E_i(\mathfrak{x}, x) = 0$. Geht also eine Gerade $\mathfrak{x}$ durch den i-ten $\mathfrak{F}$-Punkt, so ist $E_i(\mathfrak{x}, x) \equiv 0$. Anderenfalls stellt die Gleichung $E_i(\mathfrak{x}, x) = 0$ die Verbindungsebene der Geraden $\mathfrak{x}$ mit dem i-ten $\mathfrak{F}$-Punkt dar.

Hat die Gerade $\mathfrak{x}$ mit der Ebene ABC nur *einen* Punkt gemein, so hat dieser die Gleichung $\Pi_4(\mathfrak{x}, u) = 0$ und mithin die Koordinaten $\mathfrak{x}_3 | -\mathfrak{x}_5 | \mathfrak{x}_4 | 0$. Seine Koordinaten in der Ebene ABC (siehe die Einleitung) sind:

$$\mathfrak{x}_3 | -\mathfrak{x}_5 | \mathfrak{x}_4 \text{ d. i. } (\lambda\mu)_{14} | (\lambda\mu)_{24} | (\lambda\mu)_{34} \text{ oder } (lm)_{23} | (lm)_{31} | (lm)_{12}.$$

Liegt also die Gerade $\mathfrak{x}$ nicht in der Ebene ABC und geht sie nicht durch C, so sind nach dem in der Einleitung Bemerkten $(\lambda\mu)_{14} | (\lambda\mu)_{24}$ in der Geraden AB die Koordinaten des Schnittpunktes von $\mathfrak{x}$ mit der Ebene ABC. Daraus ergibt sich, wie die Quotienten aus quaternären Linienkoordinaten als Doppelverhältnisse gedeutet werden können.

§ 2. Abhängigkeit zwischen den Formen E und Π.

5. Ich setze voraus, daß $\alpha_1, \ldots \alpha_4, a_1, \ldots a_4, \mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_6$ homogene Koordinaten sind, und schreibe kurz E_i, Π_i statt $E_i(\mathfrak{x}, \alpha), \Pi_i(\mathfrak{x}, a)$.

Aus (2.) folgen die Identitäten:

$$\begin{array}{l|l}
\ast \quad \mathfrak{x}_1E_2 + \mathfrak{x}_2E_3 + \mathfrak{x}_3E_4 = \frac{1}{2}(\mathfrak{x}.\mathfrak{x})\alpha_1 & \ast \quad \mathfrak{x}_4\Pi_2 + \mathfrak{x}_5\Pi_3 + \mathfrak{x}_6\Pi_4 = \frac{1}{2}(\mathfrak{x},\mathfrak{x})a_1 \\
-\mathfrak{x}_1E_1 \quad \ast \quad + \mathfrak{x}_6E_3 - \mathfrak{x}_5E_4 = \frac{1}{2}(\mathfrak{x},\mathfrak{x})\alpha_2 & -\mathfrak{x}_4\Pi_1 \quad \ast \quad + \mathfrak{x}_3\Pi_3 - \mathfrak{x}_2\Pi_4 = \frac{1}{2}(\mathfrak{x},\mathfrak{x})a_2 \\
-\mathfrak{x}_2E_1 - \mathfrak{x}_6E_2 \quad \ast \quad + \mathfrak{x}_4E_4 = \frac{1}{2}(\mathfrak{x},\mathfrak{x})\alpha_3 & -\mathfrak{x}_5\Pi_1 - \mathfrak{x}_3\Pi_2 \quad \ast \quad + \mathfrak{x}_1\Pi_4 = \frac{1}{2}(\mathfrak{x},\mathfrak{x})a_3 \\
-\mathfrak{x}_3E_1 + \mathfrak{x}_5E_2 - \mathfrak{x}_4E_3 \quad \ast \quad = \frac{1}{2}(\mathfrak{x},\mathfrak{x})\alpha_4 & -\mathfrak{x}_6\Pi_1 + \mathfrak{x}_2\Pi_2 - \mathfrak{x}_1\Pi_3 \quad \ast \quad = \frac{1}{2}(\mathfrak{x}.\mathfrak{x})a_4
\end{array}$$

Sie lehren, daß die Fälle $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 0$ und $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Pi_4 = 0$ nur dann eintreten können, wenn $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ verschwindet. Ist also der Komplex $\mathfrak{x}$ kein „spezieller", so bestimmt er mit jedem Punkt α eine Ebene $E(\mathfrak{x}, \alpha)$, mit jeder Ebene a einen Punkt $\Pi(\mathfrak{x}, a)$.

Das System $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 0$ bedeutet, daß $\mathfrak{x}$ eine Gerade ist und α ein Punkt von $\mathfrak{x}$. Das System $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Pi_4 = 0$ bedeutet, daß $\mathfrak{x}$ eine Gerade ist und a eine Ebene durch $\mathfrak{x}$. Jedes der beiden Systeme für $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_6$ muß sich also auf drei Gleichungen zurückführen lassen; in der Tat bestehen wegen (1.) die Identitäten:

$$(5.)\quad \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 = 0,\ a_1 \Pi_1 + a_2 \Pi_2 + a_3 \Pi_3 + a_4 \Pi_4 = 0.$$

6. Die hiernach auf sechs zurückführbaren acht Gleichungen für $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_6$:

$$(6.)\qquad E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Pi_4 = 0$$

sind im allgemeinen miteinander nicht vereinbar; sie verlangen, daß die Gerade $\mathfrak{x}$ durch den Punkt α geht und zugleich in der Ebene a liegt. Die aus (3.) fließenden sechs Identitäten

$$(7.)\quad \begin{array}{l|l} \alpha_1 \Pi_2 - \alpha_2 \Pi_1 + a_3 E_4 - a_4 E_3 = a_a \mathfrak{x}_1 & a_1 E_2 - a_2 E_1 + \alpha_3 \Pi_4 - \alpha_4 \Pi_3 = a_a \mathfrak{x}_4 \\ \alpha_1 \Pi_3 - \alpha_3 \Pi_1 + a_4 E_2 - a_2 E_4 = a_a \mathfrak{x}_2 & a_1 E_3 - a_3 E_1 + \alpha_4 \Pi_2 - \alpha_2 \Pi_4 = a_a \mathfrak{x}_5 \\ \alpha_1 \Pi_4 - \alpha_4 \Pi_1 + a_2 E_3 - a_3 E_2 = a_a \mathfrak{x}_3 & a_1 E_4 - a_4 E_1 + \alpha_2 \Pi_3 - \alpha_3 \Pi_2 = a_a \mathfrak{x}_6 \end{array}$$

bestätigen in der Tat, daß für das Bestehen des Systems (6.) die Gleichung $a_a = 0$, die Inzidenz von a und α, notwendige Bedingung ist.

Diese Bedingung ist auch hinreichend. Von den Koordinaten α sei nämlich etwa α_1 eine nicht verschwindende, und a_a sei $= 0$. Dann bestehen nach (5.) und (7.) die in den $\mathfrak{x}$ identischen Gleichungen:

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 = 0,\ \alpha_1 \Pi_2 - \alpha_2 \Pi_1 + a_3 E_4 - a_4 E_3 = 0,$$
$$\alpha_1 \Pi_3 - \alpha_3 \Pi_1 + a_4 E_2 - a_2 E_4 = 0,\ \alpha_1 \Pi_4 - \alpha_4 \Pi_1 + a_2 E_3 - a_3 E_2 = 0.$$

Das Verschwinden der Ausdrücke Π_1, E_2, E_3, E_4 zieht also das der Ausdrücke E_1, Π_2, Π_3, Π_4 nach sich; das System (6.) kann im Fall $a_a = 0$, sofern $\alpha_1 \neq 0$, durch die vier Gleichungen:

$$(8.)\qquad \Pi_1 = 0,\ E_2 = 0,\ E_3 = 0,\ E_4 = 0$$

ersetzt werden. Ebenso genügen im Fall $a_a = 0$, $a_1 \neq 0$ die vier Gleichungen:

$$(9.)\qquad E_1 = 0,\ \Pi_2 = 0,\ \Pi_3 = 0,\ \Pi_4 = 0.$$

7. Die Gleichungen (8.) kann ich schreiben:

$$\begin{array}{rrrrrrr} -a_2\mathfrak{x}_1 & -a_3\mathfrak{x}_2 & -a_4\mathfrak{x}_3 & * & * & * & = 0 \\ * & \alpha_4\mathfrak{x}_2 & -\alpha_3\mathfrak{x}_3 & +\alpha_1\mathfrak{x}_4 & * & * & = 0 \\ -\alpha_4\mathfrak{x}_1 & * & +\alpha_2\mathfrak{x}_3 & * & +\alpha_1\mathfrak{x}_5 & * & = 0 \\ \alpha_3\mathfrak{x}_1 & -\alpha_2\mathfrak{x}_2 & * & * & * & +\alpha_1\mathfrak{x}_6 & = 0. \end{array}$$

Soll hier Abhängigkeit eintreten, so müssen alle Determinanten vierten Grades aus den Koeffizienten von $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_6$ verschwinden, also u. a.: $-a_2\alpha_1^3$, $-a_3\alpha_1^3$, $-a_4\alpha_1^3$. Im Fall $a_a = 0$, $\alpha_1 \neq 0$ gäbe dies aber: $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, folglich $a_1 \neq 0$, und doch $a_1\alpha_1 = 0$. Die Gleichungen (7.) lassen sich demnach in dem erwähnten Fall nicht auf weniger Gleichungen zurückführen. Dasselbe gilt für die Gleichungen (9.) im Fall $a_a = 0$, $a_1 \neq 0$.

Das System (6.) lief von vornherein auf sechs Gleichungen mit sechs homogenen Unbekannten $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_6$ hinaus. Diese Gleichungen vertragen sich im allgemeinen nicht miteinander. Im Fall der Verträglichkeit schrumpfen sie jedoch sofort zu vier Gleichungen zusammen, nicht zu einer kleineren Anzahl, und liefern mithin dann eine einfach unendliche Menge von Lösungen (die Strahlen eines Büschels).

Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind.

Von Herrn *J. Schur* in Berlin.

(Fortsetzung*).)

§ 9.
Eine Anwendung des Satzes IV.

Vor einigen Jahren hat *E. Landau***) folgenden interessanten Satz bewiesen:

Betrachtet man die Menge $\mathfrak{E}$ aller für $|x| < 1$ konvergenten Potenzreihen

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

die der Bedingung $M(f) \leqq 1$ genügen, so ist für jeden Wert von n die obere Grenze G_n des Ausdrucks $|c_0 + c_1 + \cdots + c_n|$ gleich

$$G_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1.3.\ldots.(2n-1)}{2.4.\ldots\quad 2n}\right)^2.$$

Versteht man unter P_n das Polynom

$$P_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} (-x)^\nu,$$

so liegen die Nullstellen von P_n außerhalb des Einheitskreises. Die obere Grenze G_n wird erreicht für die rationalen Funktionen

$$f(x) = \varepsilon \frac{x^n P_n(x^{-1})}{P_n(x)} \qquad (|\varepsilon| = 1)$$

und für keine andere Funktion der Funktionenklasse $\mathfrak{E}$.

---

*) Vergl. Bd. 147 (1917), S. 205—232. — Im folgenden wird dieser erste Teil der Arbeit mit P. I zitiert.

**) Archiv d. Math. u. Phys. Bd. 21 (1913), S. 250. Vergl. auch *E. Landau*, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, S. 20.

An diesem Satz wirkt, abgesehen von der genauen Berechnung der Zahl G_n, zweierlei überraschend: erstens, daß die obere Grenze überhaupt erreicht wird, und zweitens, daß die Funktionen $f(x)$, für die das eintritt, von so speziellem Typus sind. Ich will nun zeigen, daß dies auf einem allgemeinen Satz beruht:

XIII. *Es sei $S(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine gegebene ganze rationale Funktion, die keine Konstante ist, und G die obere Grenze des Ausdrucks $|S(c_0, c_1, \ldots, c_n)|$ für die Gesamtheit aller Potenzreihen $f(x)$ der Menge $\mathfrak{E}$. Dann gibt es stets Funktionen $f(x)$ der Menge $\mathfrak{E}$, für die $|S| = G$ wird, und jede solche Funktion hat die Form*

$$(33.) \qquad f(x) = \varepsilon \prod_{\nu=1}^{r} \frac{x + \omega_\nu}{1 + \bar{\omega}_\nu x}, \qquad (|\omega_\nu| < 1, |\varepsilon| = 1)$$

wobei r höchstens gleich n werden kann.

Dies folgt leicht aus den Ergebnissen des § 3. Die Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$ kommen, wie wir dort gesehen haben, dann und nur dann als die $n+1$ ersten Koeffizienten einer Potenzreihe der Menge $\mathfrak{E}$ in Betracht, wenn sie sich in der Gestalt

$$c_\nu = \Psi_\nu = \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

darstellen lassen, wobei die γ_λ nur den Bedingungen

$$(34.) \qquad |\gamma_0| \leqq 1, |\gamma_1| \leqq 1, \ldots, |\gamma_n| \leqq 1$$

zu unterwerfen sind. Der Ausdruck Ψ_ν ist eine ganze rationale Funktion von

$$\gamma_0, \bar{\gamma}_0, \ldots, \gamma_{\nu-1}, \bar{\gamma}_{\nu-1}, \gamma_\nu,$$

die in bezug auf γ_ν linear ist und die Form

$$(35.) \qquad \Psi_\nu = \gamma_\nu \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} (1 - \gamma_\lambda \bar{\gamma}_\lambda) + \Psi' \qquad (\Psi_0 = \gamma_0)$$

hat. Steht für ein spezielles Wertsystem γ_λ in einer der Ungleichungen (34.) das Gleichheitszeichen, etwa zuerst für $\lambda = r$, so wird $f(x)$ eindeutig bestimmt als die rationale Funktion $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r]$, die von der Form (33.) ist.

Ist nun

$$S(\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n) = T(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$

so läßt sich G einfach charakterisieren als die obere Grenze der Funktion $|T|$ der komplexen Variablen γ_λ in dem durch die Ungleichungen (34.) bestimmten Gebiete Γ. Da aber $|T|$ eine stetige Funktion der γ_λ und Γ ein abgeschlossenes Gebiet ist, gibt es gewiß in Γ Wertsysteme $\gamma_0', \gamma_1', \ldots, \gamma_n'$, für die $|T|$ genau gleich G wird. Eine Funktion der Klasse $\mathfrak{C}$, für die

$|S| = G$ wird, ist dann z. B. die rationale Funktion

$$\varphi(x) = [x; \gamma_0', \gamma_1', \ldots, \gamma_n'] = c_0' + c_1' x + c_2' x^2 + \cdots + c_n' x^n + \cdots$$

Wir haben nur noch zu zeigen, daß eine der Zahlen $|\gamma_\lambda'|$ genau gleich 1 sein muß. Um dies zu beweisen, beachte man zunächst, daß $T(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ nicht identisch gleich

$$s = T(0, 0, \ldots, 0) = S(0, 0, \ldots, 0)$$

werden kann, ohne daß $S(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ sich auf die Konstante s reduziert. Dies folgt leicht aus der besonderen Form (35.) der Ausdrücke Ψ_ν. Wären nun alle $|\gamma_\lambda'|$ kleiner als 1, so wäre $M(\varphi) = m < 1$ (vergl. P. I, S. 211). Ist dann $|z| \leqq \frac{1}{m}$, so wird auch $z\varphi(x)$ eine Funktion der Menge $\mathfrak{E}$, es müßte also im Kreise $|z| \leqq \frac{1}{m}$

$$|S(z c_0', z c_1', \ldots, z c_n')| \leqq |S(c_0', c_1', \ldots, c_n')|$$

sein. Da aber der absolute Betrag einer ganzen rationalen Funktion, die nicht konstant ist, sein Maximum in einem Kreise nur auf dem Rand erreicht, so müßte $S(z c_0', z c_1', \ldots, z c_n')$ von z unabhängig, d. h.

$$G = |S(0, 0, \ldots, 0)| = |s|$$

sein. Dies ist aber nicht möglich. Denn wähle ich $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ den Bedingungen (34.) gemäß so, daß $T - s \not\equiv 0$ wird, und setze $c_\nu = \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu)$, so wird auch $S(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ von s verschieden ausfallen. Für $|z| \leqq 1$ müßte nun wieder

$$|S(z c_0, z c_1, \ldots, z c_n)| \leqq G = |S(0, 0, \ldots, 0)|$$

sein. Diese Ungleichung würde aber erfordern, daß die ganze rationale Funktion $S(z c_0, z c_1, \ldots, z c_n)$ eine Konstante wird, was hier gewiß nicht der Fall ist.

§ 10.

Eine Folgerung aus den Sätzen X und XI.

In meiner in diesem Journal Bd. 140 (1911) erschienenen Arbeit habe ich (auf S. 11 und S. 14) mit rein algebraischen Hilfsmitteln bewiesen: Sind

$$A = \sum_{\varkappa, \lambda}^{1, \infty} a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda, \qquad B = \sum_{\varkappa, \lambda}^{1, \infty} b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda$$

zwei beliebige nichtnegative *Hermite*sche Formen, so ist auch die *Hermite*sche Form

$$C = \sum_{\varkappa,\lambda}^{\infty 1} a_{\varkappa\lambda} b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda$$

nichtnegativ. Setzt man ferner

$$A = \sum_{\varkappa,\lambda}^{\infty 1} a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda, \qquad B = \sum_{\varkappa,\lambda}^{\infty 1} b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \bar{x}_\lambda$$

und weiß man, daß die Bilinearform A beschränkt und die *Hermite*sche Form B nichtnegativ ist, so ist, wenn die obere Grenze b der Koeffizienten $b_{11}, b_{22}, \ldots$ endlich ist, auch die Bilinearform

$$C = \sum_{\varkappa,\lambda}^{\infty 1} a_{\varkappa\lambda} b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda$$

beschränkt, und zwar ist (in den in § 7 eingeführten Bezeichnungen)

$$m(C) \leqq b.\, m(A).$$

Kombiniert man diese beiden Sätze mit den Sätzen X und XI des ersten Teils der vorliegenden Arbeit, so ergibt sich ohne weiteres:

XIV. *Es seien*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \qquad g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$$

zwei für $|x| < 1$ *konvergente Potenzreihen, von denen die zweite einen positiven reellen Bestandteil hat. Man bilde, wenn* b_0' *den reellen Teil von* b_0 *bedeutet, die (für* $|x| < 1$ *ebenfalls konvergente) Potenzreihe*

$$h(x) = 2a_0 b_0' + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu x^\nu.$$

Diese Funktion ist dann im Kreise $|x| < 1$ *von positivem reellem Bestandteil bezw. beschränkt, wenn* $f(x)$ *die entsprechende Eigenschaft besitzt*). Im zweiten Fall ist genauer*

$$M(h) \leqq 2b_0'\, M(f). \tag{35.}$$

Man kann diesen Satz sehr leicht auch direkt beweisen: Ist nämlich

$$g(re^{i\varphi}) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi), \qquad (0 \leqq r < 1)$$

so gelten bekanntlich die Formeln

$$2\pi b_0' = \int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\, d\varphi, \qquad \pi b_\nu r^\nu = \int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\, e^{-i\nu\varphi}\, d\varphi.$$

Ist daher $|x| < 1$ und setzt man $x = r^2 e^{i\psi}$, so folgt aus

$$f(re^{i(\psi-\varphi)}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu e^{i\nu(\psi-\varphi)}$$

die Gleichung

---

*) Für den Fall $\Re(f(x)) > 0$ findet sich eine ähnliche (von *O. Toeplitz* herrührende) Bemerkung bei *E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, S. 891. Vergl. auch *F. Riesz*, dieses Journal, Bd. 146 (1915), S. 85.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\, f(re^{i(\psi-\varphi)})\, d\varphi = 2a_0 b_0' + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu b_\nu r^\nu e^{i\nu\psi} = h(x).$$

Ist nun ebenso wie $u(r,\varphi)$ auch der reelle Teil $U(r,\varphi)$ von $f(re^{i\varphi})$ positiv, so wird auch

$$\Re(h(x)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\, U(r,\psi-\varphi)\, d\varphi > 0.$$

Weiß man andererseits, daß $f(x)$ beschränkt ist, so wird

$$|h(x)| \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\,|f(re^{i(\psi-\varphi)})|\, d\varphi \leqq M(f)\,.\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\varphi)\, d\varphi.$$

Die rechtsstehende Zahl ist aber nichts anderes als $2b_0'.M(f)$.

Es ist noch zu beachten, daß, wenn $f(x)$ keiner weiteren Bedingung unterworfen wird, in der Ungleichung (35.) der Faktor $2b_0'$ durch keine kleinere Zahl ersetzt werden kann. Denn für $f(x)=1$ wird $M(h)=2b_0'$ $=2b_0'\,M(f)$.

Aus dem Satze XIV folgt auch offenbar: Ist $f(x)$ im Kreise $|x|<1$ beschränkt und weiß man von der Funktion $g(x)$ nur, daß sie sich als *Differenz* zweier für $|x|<1$ regulärer Funktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ mit positiven reellen Bestandteilen darstellen läßt, so ist die Funktion

$$(36.) \qquad p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu x^\nu$$

jedenfalls für $|x|<1$ beschränkt. Die durch die hier gekennzeichneten Funktionen $g=g_1-g_2$ gebildete Funktionenklasse bezeichne man kurz als die Klasse $\mathfrak{D}$. In der Potenzreihenentwicklung einer solchen Funktion $g(x)$ sind die Koeffizienten jedenfalls beschränkt, da g_1 und g_2 einzeln diese Eigenschaft besitzen*). Ich will aber zeigen:

Es gibt Potenzreihen $g(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$ *mit beschränkten Koeffizienten, die nicht zur Funktionenklasse* $\mathfrak{D}$ *gehören.*

Dies folgt aus der Tatsache, daß sich, wie *L. Fejér***) gezeigt hat, Potenzreihen $f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ mit reellen Koeffizienten angeben lassen, die für $|x|<1$ konvergent und beschränkt sind, bei denen die Summen

---

*) Ist der reelle Teil von $\Sigma b_\nu x^\nu$ für $|x|<1$ positiv, so ist für $\nu \geqq 1$ bekanntlich $|b_\nu| \leqq 2b_0'$. Dies folgt übrigens unmittelbar aus der Ungleichung (35.), wenn $f(x)=x^\nu$ gesetzt wird.

**) Münch. Ber. 1910, Nr. 3. — Ein etwas einfacheres Beispiel hat *E. Landau* in seinem auf S. 122 zitierten Buche (§ 3) angegeben.

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

aber nicht beschränkt sind, die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|$ also gewiß divergent ist. Wählt man nämlich eine solche Potenzreihe $f(x)$ und setzt

$$b_\nu = \operatorname{sign} a_\nu, \qquad g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu,$$

so geht die Reihe (36.) in die Reihe $\Sigma |a_\nu| x^\nu$ über. Da nun diese Reihe an der Stelle $x = 1$ divergiert und ihre Koeffizienten nichtnegative reelle Zahlen sind, so ist nach einem bekannten Satze, wenn x längs des Radius $0 \ldots 1$ der Stelle 1 zustrebt, $\lim p(x) = \infty$. Daher kann die Funktion $p(x)$ im Kreise $|x| < 1$ gewiß nicht beschränkt sein, folglich kann auch $g(x)$ nicht zur Klasse $\mathfrak{D}$ gehören.

Auf Grund des am Anfang dieses Paragraphen angeführten Satzes über Bilinearformen mit unendlich vielen Variablen folgert man in ganz ähnlicher Weise aus der Existenz von quadratischen Formen, die beschränkt, aber nicht absolut beschränkt sind*), daß es *Hermite*sche Formen mit unendlich vielen Variablen gibt, deren Koeffizienten beschränkt sind, die sich aber nicht als Differenz zweier nichtnegativer *Hermite*schen Formen mit ebenfalls beschränkten Koeffizienten darstellen lassen.

§ 11.

Über die Partialsummen einer beschränkten Potenzreihe.

Ist

$$T(\varphi) = b_0 + b_1 \cos\varphi + \cdots + b_n \cos n\varphi$$

ein Kosinuspolynom mit reellen Koeffizienten, das für reelle Werte von φ niemals negativ wird und auch nicht identisch verschwindet, so ist bekanntlich für $0 \leqq r < 1$

$$b_0 + b_1 r \cos\varphi + \cdots + b_n r^n \cos n\varphi > 0.$$

Daher hat das Polynom

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

im Kreise $|x| < 1$ einen positiven reellen Bestandteil. Ist daher $f(x) = \Sigma a_\nu x^\nu$ eine für $|x| < 1$ konvergente Potenzreihe und setzt man

$$h(x) = 2a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \cdots + a_n b_n x^n,$$

so ist nach Satz XIV für $|x| < 1$ der reelle Teil von $h(x)$ positiv, wenn

*) Vergl. meine am Anfang dieses Paragraphen erwähnte Arbeit, S. 20.

$\Re(f(x)) > 0$ ist. Ist ferner $f(x)$ beschränkt, so gilt die Ungleichung $M(h) \leqq 2b_0 M(f)$.

Setzt man speziell

$$T(\varphi) = \frac{1}{2(n+1)} \left|1 + e^{i\varphi} + \cdots + e^{in\varphi}\right|^2$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{n}{n+1}\cos\varphi + \frac{n-1}{n+1}\cos 2\varphi + \cdots + \frac{1}{n+1}\cos n\varphi \text{ *)},$$

so wird

$$h(x) = t_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n+1-\nu}{n+1} a_\nu x^\nu = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1},$$

wobei $s_\nu(x)$ die Summe der $\nu+1$ ersten Glieder der Reihe $f(x)$ bedeutet. Wählt man ferner

$$\binom{2n}{n} T(\varphi) = 2^{n-1}(1+\cos\varphi)^n = \frac{e^{-in\varphi}}{2}(1+e^{i\varphi})^{2n} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} + \sum_{\nu=1}^{n}\binom{2n}{n-\nu}\cos\nu\varphi,$$

so wird

$$h(x) = v_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n!\,n!}{(n-\nu)!\,(n+\nu)!} a_\nu x^\nu.$$

Die Ausdrücke $t_n(x)$ stellen die zur Reihe $f(x)$ gehörenden *Cesàro*schen Mittel erster Ordnung dar. Ebenso liefern die Ausdrücke $v_n(x)$ die zuerst von *de la Vallée-Poussin* **) eingeführten Mittelbildungen. Für $|x| < 1$ ist daher bekanntlich

$$\text{(37.)} \qquad \lim_{n=\infty} t_n(x) = f(x), \qquad \lim_{n=\infty} v_n(x) = f(x).$$

Es gilt nun der nicht uninteressante Satz:

XV. *Die Reihe $f(x)$ ist dann und nur dann für $|x| < 1$ konvergent und $\Re(f(x)) > 0$, wenn in diesem Kreise für jedes n*

$$\Re(t_n(x)) > 0, \text{ bezw. } \Re(v_n(x)) > 0$$

ist. Damit ferner $f(x)$ für $|x| < 1$ konvergiere und der Bedingung $|f(x)| \leqq M$ genüge, ist notwendig und hinreichend, daß in diesem Kreise für jedes n

$$|t_n(x)| \leqq M, \text{ bezw. } |v_n(x)| \leqq M$$

sei.

Daß die hier genannten Bedingungen für $t_n(x)$ und $v_n(x)$ notwendig erfüllt sein müssen, haben wir vorhin schon gesehen. Wir haben also nur das Umgekehrte zu beweisen. Ich gebe den Beweis nur für die Ausdrücke $v_n(x)$ an, da sich für die $t_n(x)$ die Betrachtung ganz ebenso gestaltet. Ist

*) Vergl. *L. Fejér*, dieses Journal, Bd. 146 (1915), S. 59.

**) Bull. de l'Acad. Sc. de Belgique 1908, S. 193. — Vergl. auch *T. H. Gronwall*, dieses Journal, Bd. 147 (1916), S. 16.

für jedes n der reelle Teil von $v_n(x)$ im Kreise $|x|<1$ positiv, so wird (vergl. die Fußnote auf S. 126) für $1 \leqq \nu < n$

$$\left|\frac{n!\,n!}{(n-\nu)!\,(n+\nu)!}\,a_\nu\right| = \left|\frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+\nu)}\,a_\nu\right| \leqq 2\,\Re(a_0).$$

Hält man ν fest und läßt n über alle Grenzen wachsen, so ergibt sich $|a_\nu| \leqq 2\,\Re(a_0)$. Daher ist die Reihe $f(x)$ für $|x|<1$ konvergent und zugleich wegen (37.)

$$\Re(f(x)) = \lim_{n=\infty} \Re(v_n(x)) \geqq 0.$$

Den Wert 0 kann aber $\Re(f(x))$ im Innern des Kreises $|x|<1$ nicht annehmen, ohne einmal negativ zu werden oder identisch zu verschwinden. Auch der zweite Fall kommt wegen $\Re(f(0)) = \Re(v_n(0)) > 0$ nicht in Betracht. In ganz ähnlicher Weise erledigt sich auch der Fall $|v_n(x)| \leqq M$.

Daß für jede beschränkte Funktion $f(x)$ mit der oberen Grenze $m = M(f)$ im Kreise $|x|<1$ stets auch

$$(38.) \qquad |t_n(x)| = \left|\frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_n(x)}{n+1}\right| \leqq m$$

ist, hat zuerst *L. Fejér**) und die Umkehrung dieses Satzes zuerst *E. Landau* (im § 1 seines auf S. 122 zitierten Buches) auf anderem Wege bewiesen.

Läßt man x gegen 1 konvergieren und setzt

$$s_\nu = a_0 + a_1 + \dots + a_\nu,$$

so ergibt sich aus (38.)

$$(39.) \qquad \left|\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}\right| \leqq m.$$

Weiß man umgekehrt, daß diese Ungleichung für jede beschränkte Funktion $f(x)$ mit der oberen Grenze m gilt, so lehrt die Betrachtung der Reihe $\Sigma\, a_\nu x^\nu z^\nu$, daß für $|x| \leqq 1$ auch die Ungleichung (38.) gilt.

Ich will nun zeigen, daß die Relation (39.) durch eine wesentlich schärfere ersetzt werden kann. Unter den hier über $f(x)$ gemachten Voraussetzungen besteht nämlich, wie wir P. I, S. 227 gesehen haben, für jedes Wertsystem $u_0, u_1, \dots, u_n$ die Ungleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \dots + a_{n-\nu} u_n|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2.$$

Setzt man hier alle u_λ gleich 1, so geht sie über in

---

*) Rendiconti di Palermo, Bd. 38 (1914), S. 95.

$$(40.) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} |s_{n-\nu}|^2 = \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu|^2 \leqq (n+1)\, m^2.$$

Es ist aber auf Grund einer bekannten Ungleichung

$$(|s_0| + |s_1| + \cdots + |s_n|)^2 \leqq (n+1)\,(|s_0|^2 + |s_1|^2 + \cdots + |s_n|^2).$$

Aus (40.) folgt daher

$$(40'.) \qquad \frac{|s_0| + |s_1| + \cdots + |s_n|}{n+1} \leqq m,$$

was mehr besagt als die Ungleichung (39.).

Hieraus folgt in bekannter Weise: Ist $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ irgend eine monoton ins Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen, so ist stets

$$\lambda = \liminf_{n=\infty} \frac{|s_n|}{\sigma_n} = 0.$$

Für jede im Kreise $|x| < 1$ beschränkte Funktion $f(x)$ ist bekanntlich*) $\frac{|s_n|}{\log n}$ unterhalb einer endlichen Schranke gelegen. Aus unserem Ergebnis folgt, daß, wenn $\lim_{n=\infty} \frac{|s_n|}{\log n}$ existiert, dieser Grenzwert nur den Wert 0 haben kann**).

§ 12.

Über eine spezielle Klasse von beschränkten Potenzreihen.

Verstehen wir wieder unter $f(x) = \Sigma a_\nu x^\nu$ eine im Kreise $|x| < 1$ konvergente und beschränkte Potenzreihe und ist $M(f) = m$, so gilt bekanntlich die Ungleichung

$$(41.) \qquad b_0 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots \leqq m^2.$$

(Dies folgt aus der Formel (25.) des § 7 oder auch aus dem Satze X.)

---

*) Vgl. *E. Landau*, Arch. d. Math. u. Phys. Bd. 21 (1913), S. 42.

**) In einer vor kurzem erschienenen Arbeit (Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1917, S. 119—128) hat *H. Bohr* gezeigt, daß es spezielle Funktionen der Klasse $\mathfrak{E}$ gibt, für die $\limsup_{n=\infty} \frac{|s_n|}{G_n} = 1$ ist (hierbei bedeutet G_n die in § 9 erwähnte *Landau*sche obere Grenze für $|s_n|$). Da andererseits $\liminf_{n=\infty} \frac{|s_n|}{G_n} = 0$ und $G_n \backsim \frac{1}{\pi} \log n$ ist, so existiert in dem *Bohr*schen Falle $\lim_{n=\infty} \frac{|s_n|}{\log n}$ nicht. — Herr *Bohr* beweist ferner a. a. O. mit recht tiefliegenden Hilfsmitteln, daß für jede Funktion der Klasse $\mathfrak{E}$ $\limsup_{n=\infty} (G_n - |s_n|) = \infty$ ist. Dies folgt unmittelbar aus der im Text bewiesenen Ungleichung (40'.) in Verbindung mit der Tatsache, daß $\lim_{n=\infty} \frac{G_0 + G_1 + \cdots + G_n}{n+1} = \infty$ ist. (Zusatz bei der Korrektur.)

Es entsteht nun die Frage: *wann gilt in* (41.) *das Gleichheitszeichen?* Die Antwort auf diese Frage gibt der Satz:

XVI. *Damit die Potenzreihe* $f(x)$ *im Kreise* $|x| < 1$ *beschränkt sei und die obere Grenze*

$$M(f) = \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots} = \sqrt{b_0}$$

besitze, ist notwendig und hinreichend, daß die hier auftretende Reihe konvergiere und außerdem die sämtlichen (alsdann ebenfalls konvergenten) Reihen

$$b_\nu = a_0\bar{a}_\nu + a_1\bar{a}_{\nu+1} + a_2\bar{a}_{\nu+2} + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

die Summe 0 *haben.*

Besitzt nämlich $f(x)$ die verlangte Eigenschaft, so besteht für jedes Wertsystem $u_0, u_1, u_2, \ldots$, für das die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} |u_\nu|^2$ konvergiert, die Ungleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \cdots|^2 \leqq b_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} |u_\nu|^2$$

(vergl. § 7, Formel (27.)). Setzt man insbesondere $u_\nu = \bar{a}_\nu$, so ergibt sich

$$b_0^2 + |b_1|^2 + |b_2|^2 + \cdots \leqq b_0^2.$$

Daher müssen die Zahlen $b_1, b_2, \ldots$ sämtlich verschwinden.

Ist umgekehrt die Reihe b_0 konvergent und $b_\nu = 0$ für $\nu > 0$, so wird, wenn A wie früher die Bilinearform

$$A = \sum_{\lambda \geqq \varkappa} a_{\lambda-\varkappa}\, x_\varkappa\, y_\lambda$$

und auch die zugehörige Matrix bedeutet, $A\bar{A}' = b_0 E$. Die *Hermite*sche Form $A\bar{A}'$ ist also beschränkt und ihre obere Grenze gleich b_0. Hieraus folgt aber (vergl. § 7), daß auch die Bilinearform A beschränkt und ihre obere Grenze gleich $\sqrt{b_0}$ ist. Folglich ist nach Satz X die Potenzreihe $f(x)$ für $|x| < 1$ beschränkt und $M(f) = \sqrt{b_0}$.

Will man von der Theorie der Bilinearformen keinen Gebrauch machen, so kann man folgendermaßen schließen. Ist die Reihe b_0 konvergent und setzt man

$$b_{-\nu} = \bar{b}_\nu = \bar{a}_0 a_\nu + \bar{a}_1 a_{\nu+1} + \cdots,$$

so wird, wie eine einfache Rechnung zeigt, für beliebige $n+1$ Größen $u_0, u_1, \ldots, u_n$

$$\sum_{\varkappa,\lambda}^{n}{}_0 b_{\lambda-\varkappa}\, u_\varkappa \bar{u}_\lambda = \sum_{\nu=-n}^{\infty} \left| \sum_{\lambda=0}^{n} a_{\lambda+\nu}\, u_\lambda \right|^2,$$

wobei $a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ gleich 0 zu setzen sind. Haben insbesondere $b_1, b_2, \ldots$

den Wert 0, so wird die links stehende Summe gleich $b_0 \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2$. Daher ist

$$\sum_{\nu=-n}^{0} \left| \sum_{\lambda=0}^{n} a_{\lambda+\nu} u_\lambda \right|^2 = \sum_{\lambda=0}^{n} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \cdots + a_{n-\nu} u_n|^2 \leqq b_0 \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2.$$

Das Bestehen dieser Ungleichung für alle n und für beliebige u_ν liefert aber, wie wir P. I, S. 227 gesehen haben, eine hinreichende Bedingung dafür, daß $f(x)$ für $|x| < 1$ beschränkt und $M(f) \leqq \sqrt{b_0}$ sei. Da andererseits $\sqrt{b_0} \leqq M(f)$ ist, muß hier das Gleichheitszeichen gelten.

Ist insbesondere $f(x)$ im Einheitskreise mit Einschluß des Randes stetig, so wird bekanntlich

$$b_0 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|^2 d\varphi.$$

In diesem Fall wird offenbar dann und nur dann $M(f) = \sqrt{b_0}$, wenn $f(e^{i\varphi})$ von konstantem absolutem Betrage ist. Zu dieser Klasse von Funktionen gehören insbesondere die rationalen Funktionen der Form

$$f(x) = c \prod_{\nu=1}^{n} \frac{x + \omega_\nu}{1 + \bar{\omega}_\nu x}, \qquad (|\omega_\nu| < 1)$$

wobei c eine beliebige Konstante bedeuten kann.

Allgemein hat Herr *Fatou**) bewiesen, daß, wenn $f(x)$ im Kreise $|x| < 1$ regulär und beschränkt ist, für alle reellen Werte von φ, abgesehen von einer Menge vom *Lebesgue*schen Maße 0,

$$\lim_{r=1} f(r e^{i\varphi}) = F(\varphi)$$

existiert**) und

$$b_0 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\varphi)|^2 d\varphi$$

ist. Hierbei ist das Integral im *Lebesgue*schen Sinne zu verstehen. Soll die Reihensumme b_0 gleich dem Quadrat der oberen Grenze von $f(x)$ sein, so muß $F(\varphi)$, abgesehen von einer Menge vom Maße 0, von konstantem absolutem Betrage sein, und diese Bedingung ist auch hinreichend. Daß aber aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2$ und den Gleichungen $b_1 = 0$,

---

*) Acta Math. Bd. 30 (1906), S. 335.

**) Allgemeiner konvergiert $f(x)$ gegen $F(\varphi)$, wenn x aus dem Innern des Einheitskreises kommend auf irgendeiner geraden Linie dem Punkte $e^{i\varphi}$ zustrebt; vergl. *E. Study*, Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche (Teubner 1913), S. 50.

$b_2 = 0, \ldots$ die Beschränktheit von $f(x)$ und die Gleichung $M(f) = \sqrt{b_0}$ folgt, ergibt sich aus dem *Fatou*schen Satze noch nicht.

Ich will noch auf eine interessante spezielle Klasse von Funktionen der hier betrachteten Art aufmerksam machen.

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ beliebige von Null verschiedene Größen, deren absolute Beträge sämtlich kleiner als 1 sind und für die die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-|\alpha_\nu|)$ konvergent ist. Dann ist auch das unendliche Produkt

$$\alpha = \prod_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$$

konvergent und von Null verschieden. Bedeutet nun $r_1, r_2, \ldots$ irgendeine Folge wachsender positiver ganzer Zahlen, so ist das unendliche Produkt

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha_\nu^{-1} x^{r_\nu}}{1 - \bar{\alpha}_\nu x^{r_\nu}}$$

für $|x| < 1$ konvergent, und diese Funktion verhält sich in diesem Kreise regulär. Setzt man nämlich

$$f_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1 - \alpha_\nu^{-1} x^{r_\nu}}{1 - \bar{\alpha}_\nu x^{r_\nu}} = a_{n0} + a_{n1} x + a_{n2} x^2 + \cdots,$$

so ist $f_n(x)$ für $|x| \leqq 1$ regulär, und für $|x| = 1$ wird

$$|f_n(x)| = \frac{1}{|\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n|} < \frac{1}{\alpha}. \tag{42.}$$

Daher ist für jedes ν auch $|a_{n\nu}| < \frac{1}{\alpha}$. Außerdem stimmen für $\lambda > 0$ die Potenzreihenentwicklungen von $f_n(x)$ und $f_{n+\lambda}(x)$ in den r_{n+1} ersten Gliedern überein. Setzt man nun

$$a_0 = a_{10}, a_1 = a_{21}, a_2 = a_{32}, \ldots,$$

so ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ wegen $|a_\nu| < \frac{1}{\alpha}$ im Kreise $|x| < 1$ konvergent, und man erkennt leicht, daß in diesem Kreise

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

ist. Aus (42.) folgt zugleich, daß $M(f) \leqq \frac{1}{\alpha}$ ist. Andererseits ergibt sich aber auch aus dieser Gleichung, daß für jedes n die Relation

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|^2 = \frac{1}{|\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n|^2}$$

besteht. Für $\nu < r_{n+1}$ ist ferner offenbar $a_{n\nu} = a_\nu$. Daher ist

$$\frac{1}{|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n|^2} - \sum_{\nu=0}^{r_{n+1}-1} |a_\nu|^2 = \sum_{\nu=r_{n+1}}^{\infty} |a_{n\nu}|^2.$$

Wählt man nun, was jedenfalls stets möglich ist, die Zahlen r_λ so, daß die rechts stehende Summe mit wachsendem n gegen 0 konvergiert*), so wird

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 = \lim_{n=\infty} \frac{1}{|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n|^2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Hieraus folgt zugleich, daß die obere Grenze $M(f)$ von $f(x)$ genau gleich $\frac{1}{\alpha}$ ist, da sonst die links stehende Summe größer als das Quadrat von $M(f)$ wäre.

Die auf diese Weise gewonnene Funktion $f(x)$ genügt also den Bedingungen des Satzes XVI. Sie besitzt nun eine merkwürdige Eigenschaft: sie hat im Innern des Einheitskreises unendlich viele Nullstellen, und jeder Randpunkt ist eine Häufungsstelle der Menge dieser Nullstellen, bei geradliniger Annäherung an einen Randpunkt konvergiert aber $|f(x)|$ (nach dem *Fatou*schen Satze) im allgemeinen gegen $\frac{1}{\alpha}$. Die Ausnahmepunkte auf dem Rande bilden höchstens nur eine Menge vom Maße Null**).

§ 13.

Über Polynome, die nur im Innern des Einheitskreises verschwinden.

Aus dem Satze VIII ergibt sich ohne Mühe ein interessanter Satz der Algebra, der auf rein algebraischem Wege nicht leicht zu beweisen sein dürfte:

XVII. *Die Nullstellen des Polynoms n-ten Grades*

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

sind dann und nur dann sämtlich im Innern des Einheitskreises gelegen, wenn die Hermitesche Form

$$H = \sum_{\lambda=0}^{n-1} |\bar{a}_n x_\lambda + \bar{a}_{n-1} x_{\lambda+1} + \dots + \bar{a}_{\lambda+1} x_{n-1}|^2 - \sum_{\lambda=0}^{n-1} |a_0 x_\lambda + a_1 x_{\lambda+1} + \dots + a_{n-1-\lambda} x_{n-1}|^2$$

positiv definit ist, oder was dasselbe ist, wenn die n Determinanten

---

*) Es ist hierbei zu beachten, daß die Zahlen $a_{n\nu}$ von der Wahl der Zahlen $r_{n+1}, r_{n+2}, \dots$ unabhängig sind.

**) Vergl. hierzu *H. Gronwall*, Annals of Math. Bd. 14 (1912), S. 72, und *W. Blaschke*, Leipziger Berichte, Bd. LXVII (1915), S. 194.

$$\delta_{\nu+1} = \begin{vmatrix} a_n, & 0, & \dots, & 0, & a_0, a_1, \dots, a_\nu \\ a_{n-1}, a_n, & \dots, & 0, & 0, & a_0, \dots, a_{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-\nu}, a_{n-\nu+1}, \dots, a_n, & 0, & 0, & \dots, & a_0 \\ \bar{a}_0, & 0, & \dots, & 0, & \bar{a}_n, \bar{a}_{n-1}, \dots, \bar{a}_{n-\nu} \\ \bar{a}_1, & \bar{a}_0, & \dots, & 0, & 0, \bar{a}_n, \dots, \bar{a}_{n-\nu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_\nu, & \bar{a}_{\nu-1}, & \dots, & \bar{a}_0, & 0, 0, \dots, \bar{a}_n \end{vmatrix} \qquad (\nu = 0, 1, \dots, n-1)$$

positive (von Null verschiedene) Werte haben.

Man setze nämlich

$$h(x) = x^n \bar{g}(x^{-1}) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} x + \cdots + \bar{a}_0 x^n$$

und betrachte den Quotienten

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Wir haben nur zu untersuchen, unter welchen Bedingungen $f(x)$ eine Funktion der Form (18.) darstellt (vergl. § 6). Hierzu sind nur die dort angegebenen Determinanten $\delta_1, \delta_2, \dots$ zu bilden, wobei

$$b_0 = \bar{a}_n, \quad b_1 = \bar{a}_{n-1}, \dots, b_n = \bar{a}_0$$

und $a_\lambda = b_\lambda = 0$ für $\lambda > n$ zu setzen ist. Soll $f(x)$ die Form (18.) haben, so muß

$$\delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0, \dots, \delta_n > 0, \quad \delta_{n+1} = \delta_{n+2} = \cdots = 0$$

sein. Die Determinanten $\delta_{n+1}, \delta_{n+2}, \dots$ sind aber in unserem Falle von selbst gleich 0, weil in jeder von ihnen die erste Kolonne mit einer der übrigen übereinstimmt. Notwendig und hinreichend ist also nur, daß die n ersten Determinanten δ_λ positive Werte haben. Da aber δ_λ die λ-te Abschnittsdeterminante der *Hermite*schen Form H ist, so besagt dies nur, daß H eine positiv definite Form sein muß.

Versteht man, wenn

$$\psi(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots$$

eine beliebige Potenzreihe ist, unter $N_n(\psi)$ die Summe

$$N_n(\psi) = |c_0|^2 + |c_1|^2 + \cdots + |c_{n-1}|^2$$

und setzt man

$$\varphi(t) = x_0 t^{n-1} + x_1 t^{n-2} + \cdots + x_{n-1},$$

so wird, wie man leicht sieht,

$$H = N_n(h\varphi) - N_n(g\varphi).$$

Die Wurzeln der Gleichung $g(x) = 0$ liegen also dann und nur dann sämtlich

*im Innern des Einheitskreises, wenn diese Differenz für jedes nicht identisch verschwindende Polynom $\varphi(x)$, dessen Grad höchstens gleich $n-1$ ist, einen positiven Wert hat**).

Der Satz XVII liefert auch eine Lösung der Aufgabe: zu entscheiden, unter welchen Bedingungen eine gegebene Gleichung n-ten Grades $G(x)=0$ nur Wurzeln mit negativem reellem Teil besitzt. Hierzu hat man nur zu untersuchen, ob die Gleichung

$$g(x)=(x-1)^n\, G\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0$$

den Bedingungen unseres Satzes genügt. Für Polynome $G(x)$ mit reellen Koeffizienten haben diese Aufgabe *E. J. Routh***) und *A. Hurwitz****) auf anderem Wege gelöst. Es dürfte nicht ganz leicht sein, aus dem hier gewonnenen Ergebnis die eleganten von Herrn *Hurwitz* angegebenen Bedingungen abzuleiten.

Unser Satz gestattet auch, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür anzugeben, daß die *Wurzeln* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ *einer Gleichung n-ten Grades*

$$F(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n=0$$

voneinander verschieden und sämtlich vom absoluten Betrage 1 *seien.* Dies ist, wie ich zeigen will, dann und nur dann der Fall, *wenn erstens*

$$c_0\,\bar{c}_{n-\nu}=\bar{c}_n c_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \tag{43.}$$

ist, und zweitens die Wurzeln $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_{n-1}'$ *der derivierten Gleichung* $F'(x)=0$ *sämtlich im Innern des Einheitskreises liegen*†), *d. h.* $F'(x)$ *den Bedingungen des Satzes* XVII *genügt.*

Sind nämlich alle Zahlen $|\varepsilon_\nu|$ gleich 1 und setzt man

$$F^*(x)=x^n\,\bar{F}(x^{-1})=\bar{c}_n+\bar{c}_{n-1}x+\cdots+\bar{c}_0x^n,$$

so unterscheiden sich F und F^* voneinander nur um einen konstanten

---

*) Dasselbe gilt dann von selbst auch für eine beliebige Potenzreihe $\varphi(t)$.

**) „Die Dynamik der Systeme starrer Körper“ (deutsche Ausgabe, Leipzig 1898), Bd. 2, § 291.

***) Math. Ann. Bd. 46 (1895), S. 273. — Vergl. auch *L. Orlando*, Math. Ann. Bd. 71 (1912), S. 233.

†) Herr *G. Pólya*, den ich von diesem Satz in Kenntnis setzte, hatte die Freundlichkeit, mir noch einen andern, von Herrn *A. Hurwitz* herrührenden Beweis mitzuteilen, der sich auf den bekannten Satz von *Biehler* (dieses Journal Bd. 87, S. 350) stützt.

Faktor. Durch Vergleichen der von x freien Glieder erhält man $c_0 F^* = \bar{c}_n F$, und das liefert die Bedingungen (43.). Liegen ferner alle Wurzeln von $F = 0$ in oder auf dem Rande $\mathfrak{R}$ eines konvexen Bereiches $\mathfrak{K}$, so gilt dasselbe nach einem bekannten Satze von *Gauß**) auch für die Wurzeln von $F' = 0$. Die auf $\mathfrak{R}$ liegenden Wurzeln von $F' = 0$ sind hierbei nichts anderes als die auf $\mathfrak{R}$ gelegenen *mehrfachen* Wurzeln von $F = 0$. In unserem Fall kann für $\mathfrak{K}$ der Einheitskreis gewählt werden, und da $F = 0$ keine mehrfachen Wurzeln besitzen soll, so müssen die Zahlen ε_λ' im *Innern* von $\mathfrak{K}$ liegen.

Sind umgekehrt die Gleichungen (43.) erfüllt, so ist insbesondere $|c_0| = |c_n|$. Ist dann ζ einer der beiden Werte von $\sqrt{\frac{\bar{c}_n}{c_0}}$ und setzt man

$$P(x) = \zeta x F'(x), \qquad Q(x) = x^n \bar{P}(x^{-1}) = \zeta^{-1} x^{n-1} \bar{F}'(x^{-1}),$$

so wird, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$P(x) + Q(x) = n\zeta F(x).$$

Liegen nun alle Wurzeln von $F' = 0$ oder, was dasselbe ist, von $P = 0$ im Innern des Einheitskreises, so folgt aus dem P. I, S. 230 bewiesenen Satze XII, daß die Gleichung $F = 0$ die verlangte Eigenschaft besitzt.

Hieraus folgt leicht: *Ein trigonometrisches Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten*

$$T(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi)$$

verschwindet dann und nur dann an $2n$ verschiedenen Stellen des Intervalls $0 \leqq \varphi < 2\pi$, wenn das Polynom des Grades $2n-1$

$$g(x) = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n} (n + \nu)\, c_\nu x^{n+\nu-1}$$

den Bedingungen des Satzes XVII *genügt. Hierbei ist*

$$c_\nu = a_\nu + i b_\nu, \qquad c_{-\nu} = a_\nu - i b_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n,\ b_0 = 0)$$

zu setzen.

§ 14.

Die rationalen Funktionen $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$.

Diese Funktionen, auf die wir bei der Betrachtung der im Kreise $|x| < 1$ beschränkten Potenzreihen geführt wurden (vgl. § 2), haben einige interessante Eigenschaften.

---

*) Werke, Bd. III, 1866, S. 112. Weitere Literaturangaben findet man bei *L. Fejér*, Math. Ann. Bd. 65 (1908), S. 417.

Sind $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ beliebige Größen, so hat man sich zur Berechnung des Ausdrucks

$$f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n] \tag{44.}$$

der Rekursionsformel

$$[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n] = \frac{\gamma_0 + x[x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n]}{1 + \bar{\gamma}_0 x[x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n]}, \quad [x; \gamma_n] = \gamma_n$$

zu bedienen. Setzt man

$$f_\nu(x) = [x; \gamma_\nu, \gamma_{\nu+1}, \ldots, \gamma_n],$$

so läßt sich $f(x)$ auf die Form

$$f = \frac{C_{\nu-1} + x D_{\nu-1} f_\nu}{A_{\nu-1} + x B_{\nu-1} f_\nu} \tag{45.}$$

bringen, wobei $A_{\nu-1}, \ldots$ ganze rationale Funktionen sind, die mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$\begin{cases} A_\nu = A_{\nu-1} + \gamma_\nu x B_{\nu-1}, & B_\nu = \bar{\gamma}_\nu A_{\nu-1} + x B_{\nu-1}, \\ C_\nu = C_{\nu-1} + \gamma_\nu x D_{\nu-1}, & D_\nu = \bar{\gamma}_\nu C_{\nu-1} + x D_{\nu-1} \end{cases} \tag{46.}$$

zu berechnen sind. Es kommt noch hinzu, daß

$$A_0 = 1, \; B_0 = \bar{\gamma}_0, \; C_0 = \gamma_0, \; D_0 = 1$$

zu setzen ist. Speziell wird

$$A_1 = 1 + \bar{\gamma}_0 \gamma_1 x, \; B_1 = \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_0 x, \; C_1 = \gamma_0 + \gamma_1 x, \; D_1 = \gamma_0 \bar{\gamma}_1 + x,$$

$$A_2 = 1 + (\bar{\gamma}_0 \gamma_1 + \bar{\gamma}_1 \gamma_2) x + \bar{\gamma}_0 \gamma_2 x^2, \quad B_2 = \bar{\gamma}_2 + (\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_0 \gamma_1 \bar{\gamma}_2) x + \bar{\gamma}_0 x^2,$$

$$C_2 = \gamma_0 + (\gamma_1 + \gamma_0 \bar{\gamma}_1 \gamma_2) x + \gamma_2 x^2, \quad D_2 = \gamma_0 \bar{\gamma}_2 + (\gamma_0 \bar{\gamma}_1 + \gamma_1 \bar{\gamma}_2) x + x^2.$$

Schreibt man noch deutlicher

$$A_\nu = A(x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu), \quad B_\nu = B(x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) \text{ u. s. w.},$$

so ergibt sich mit Hilfe der Formeln (46.) ohne Mühe

$$\begin{cases} A(x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = A(x; \bar{\gamma}_\nu, \bar{\gamma}_{\nu-1}, \ldots, \bar{\gamma}_0), \\ B(x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = C(x; \bar{\gamma}_\nu, \bar{\gamma}_{\nu-1}, \ldots, \bar{\gamma}_0), \\ D(x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = D(x; \bar{\gamma}_\nu, \bar{\gamma}_{\nu-1}, \ldots, \bar{\gamma}_0). \end{cases} \tag{47.}$$

Ferner ist

$$D(x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = x^\nu A(x^{-1}; \bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_\nu),$$

$$B(x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = x^\nu C(x^{-1}; \bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_\nu),$$

wofür wir auch einfacher

$$D_\nu(x) = x^\nu \bar{A}_\nu(x^{-1}), \quad B_\nu(x) = x^\nu \bar{C}_\nu(x^{-1}) \tag{48.}$$

schreiben können. Ist γ_ν von Null verschieden, so kommt noch hinzu

$$C(x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = \gamma_\nu x^\nu A(x^{-1}; \bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_{\nu-1}, \gamma_\nu^{-1}).$$

Besonders wichtig sind für das folgende die Relationen

$$(49.) \qquad A_\nu D_\nu - B_\nu C_\nu = p_\nu x^\nu,$$

$$(50.) \qquad A_{\nu+1} C_\nu - A_\nu C_{\nu+1} = -\gamma_{\nu+1} p_\nu x^{\nu+1},$$

wobei

$$p_\nu = \prod_{\lambda=0}^{\nu} (1 - \gamma_\lambda \bar{\gamma}_\lambda)$$

zu setzen ist. Wegen (48.) läßt sich die Gleichung (49.) auch in der Form

$$(51.) \qquad A_\nu(x)\, \bar{A}_\nu(x^{-1}) - C_\nu(x)\, \bar{C}_\nu(x^{-1}) = p_\nu$$

schreiben*).

Die Ausdrücke A_ν und C_ν haben insbesondere die Form

$$A_\nu = 1 + \cdots + \bar{\gamma}_0 \gamma_\nu x^\nu, \qquad C_\nu = \gamma_0 + \cdots + \gamma_\nu x^\nu.$$

Aus (49.) und (50.) folgt noch, daß, wenn keine der Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\nu-1}$ vom absoluten Betrage 1 ist, A_ν und C_ν teilerfremde Polynome sind. Setzt man in (45.) insbesondere $\nu = n$, so erhält man wegen $f_n = [x; \gamma_n] = \gamma_n$

$$f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n] = \frac{C_n(x)}{A_n(x)}.$$

Das bisher Gesagte gilt für beliebige Werte der Parameter γ_ν. Uns interessiert vor allem der Fall

$$(52.) \qquad |\gamma_0| < 1, \ |\gamma_1| < 1, \ldots, |\gamma_{n-1}| < 1, \ |\gamma_n| \leqq 1.$$

Unter dieser Annahme verhält sich, wie wir früher gesehen haben, $f(x)$ im Kreise $|x| \leqq 1$ regulär und genügt der Bedingung $M(f) \leqq 1$. Da außerdem A_n und C_n keinen Teiler gemeinsam haben, so ist *das Polynom $A_n(x)$ im Innern und auf dem Rande des Einheitskreises von Null verschieden***).

Es entsteht nun die Frage: *Welche rationalen Funktionen*

$$f(x) = \frac{C(x)}{A(x)} = \frac{c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n}{1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}$$

lassen sich in der Form (44.) *darstellen, wobei die Parameter $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ den Bedingungen* (52.) *genügen?* Die Polynome $A(x)$ und $C(x)$ können hierbei als teilerfremd angenommen werden, auch sollen die Koeffizienten a_n und c_n nicht beide Null sein.

Ich will nun beweisen: *Notwendig und hinreichend ist, daß $A(x)$ im*

---

*) Am elegantesten lassen sich die im Text angegebenen Formeln mit Hilfe des Matrizenkalküls beweisen. Man hat hierbei von der aus (46.) leicht folgenden Gleichung

$$\begin{pmatrix} A_\nu & B_\nu \\ C_\nu & D_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{\gamma}_0 \\ \gamma_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\gamma}_1 \\ \gamma_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & \bar{\gamma}_{\nu-1} \\ \gamma_{\nu-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\gamma}_\nu \\ \gamma_\nu & 1 \end{pmatrix}$$

auszugehen. Es handelt sich übrigens um bekannte Formeln für Kettenbrüche.

**) Es kann aber auch $A_n(x) = 1$ werden.

Innern und auf dem Rande des Einheitskreises nicht verschwinde und außerdem

$$A(x)\,\bar{A}(x^{-1}) - C(x)\,\bar{C}(x^{-1}) = p \tag{53.}$$

eine nichtnegative reelle Konstante sei.

Wir haben nur zu zeigen, daß diese Bedingungen hinreichend sind. Für $n = 0$ ist die Behauptung gewiß richtig, es sei also $n > 0$. Aus der ersten Voraussetzung folgt, daß $f(x)$ im Kreise $|x| \leqq 1$ keinen Pol besitzt. Für $|x| = 1$ ergibt sich ferner aus (53.)

$$|A(x)|^2 - |C(x)|^2 = p \geqq 0, \text{ also } 1 - |f(x)|^2 \geqq 0.$$

Daher ist $|f(x)|$ auch für $|x| < 1$ höchstens gleich 1. Genauer ist in diesem Gebiete $|f(x)| < 1$, weil sonst $f(x) = f(0) = c_0$ werden müßte. Dieser Fall ist aber auszuschließen, da $A(x)$ und $C(x)$ keinen Teiler gemeinsam haben sollen. Insbesondere ist der absolute Betrag von $c_0 = \gamma_0$ kleiner als 1. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (53.) mit x^n und vergleicht die Koeffizienten von x^{2n}, so erhält man $a_n = \bar{c}_0 c_n = \bar{\gamma}_0 c_n$. Hieraus folgt, daß beide Ausdrücke

$$A(x) = \frac{A - \bar{\gamma}_0 C}{1 - \gamma_0\bar{\gamma}_0}, \qquad \Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{C - \gamma_0 A}{1 - \gamma_0\bar{\gamma}_0}$$

Polynome höchstens vom Grade $n - 1$ sind, die keinen Teiler gemeinsam haben. Zwischen ihnen besteht, wie eine einfache Rechnung zeigt, die Relation

$$A(x)\,\bar{A}(x^{-1}) - \Gamma(x)\,\bar{\Gamma}(x^{-1}) = \frac{p}{1 - \gamma_0\bar{\gamma}_0}.$$

Außerdem kann $A(x)$ an keiner Stelle ξ des Kreises $|x| \leqq 1$ verschwinden. Denn aus $A(\xi) = 0$ folgt $1 - \bar{\gamma}_0 f(\xi) = 0$, für $|\xi| \leqq 1$ ist aber $|\bar{\gamma}_0 f(\xi)| \leqq |\bar{\gamma}_0| < 1$. Der Ausdruck

$$f_1(x) = \frac{\Gamma(x)}{A(x)}$$

genügt also den beiden über $f(x)$ gemachten Voraussetzungen, wobei aber an Stelle von n die Zahl $n - 1$ getreten ist. Nehmen wir nun das zu Beweisende für $f_1(x)$ als richtig an, so läßt sich diese Funktion auf die Form $[x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n]$ bringen, wobei $|\gamma_1| < 1, \ldots, |\gamma_{n-1}| < 1, |\gamma_n| \leqq 1$ wird. Da aber

$$f(x) = \frac{\gamma_0 + x f_1(x)}{1 + \bar{\gamma}_0 x f_1(x)}$$

ist, so wird $f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$, und hierbei genügen die γ_ν den Bedingungen (52.).

Es ist noch zu beachten, daß der Nenner $A(x)$ des Ausdrucks $f(x)$

keiner weiteren Bedingung zu unterwerfen ist, als der, daß seine Nullstellen außerhalb des Einheitskreises liegen sollen. Zu jedem solchen Polynom des Grades n lassen sich auf unendlich viele verschiedene Arten Polynome $C(x)$ desselben Grades bestimmen, die zu $A(x)$ teilerfremd sind und der Bedingung (53.) genügen. Hierzu hat man nur für p irgendeine nichtnegative reelle Zahl zu wählen, die höchstens gleich ist dem Minimum von $|A(e^{i\varphi})|^2$ für reelle Werte von φ, und alsdann $A(x)\,\bar{A}(x^{-1}) - p$ auf die Form $C(x)\,\bar{C}(x^{-1})$ zu bringen. Daß dies für jedes derartige p möglich ist, ergibt sich mit Hilfe eines Satzes über trigonometrische Polynome, dessen Beweis von *F. Riesz* herrührt (vergl. *L. Fejér*, dieses Journal Bd. 146 (1915), S. 55). Für $p = 0$ hat man insbesondere $C(x) = \varepsilon x^n \bar{A}(x^{-1})$ zu setzen, wo ε eine beliebige Größe vom absoluten Betrage 1 bedeutet. *Diese Betrachtung lehrt, daß jedes Polynom $A(x)$ vom Grade n, dessen Nullstellen außerhalb des Einheitskreises liegen und das für $x = 0$ gleich* 1 *wird, sich in der Form*

$$A(x) = A(x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

darstellen läßt, wobei die Parameter γ_ν den Bedingungen (52.) *genügen.* Diese Darstellung läßt sich stets auch so wählen, daß $\gamma_n = 1$ wird. Die übrigen Zahlen γ_ν sind dann eindeutig bestimmt. Um sie zu erhalten, hat man nur den Ausdruck

$$f(x) = \frac{x^n\,\bar{A}(x^{-1})}{A(x)}$$

auf die Form $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ zu bringen. Sind insbesondere die Koeffizienten von $A(x)$ rationale Zahlen, so sind auch alle γ_ν rational.

§ 15.

Einige Eigenschaften der zu einer beschränkten Potenzreihe gehörenden Parameterdarstellung.

Wir haben früher gesehen, daß jede im Kreise $|x| < 1$ reguläre Funktion $f(x)$, die der Bedingung $M(f) \leqq 1$ genügt, in der Form

$$(54.) \qquad f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) x^\nu$$

darstellbar ist, wobei die Parameter γ_ν den Bedingungen $|\gamma_\nu| \leqq 1$ zu unterwerfen sind (vergl. § 3).

Setzt man, wenn $f(x)$ in dieser Form gegeben ist,

$$f_\nu(x) = [x; \gamma_\nu, \gamma_{\nu+1}, \ldots]$$

und versteht unter $A_\nu, B_\nu, C_\nu, D_\nu$ die im vorigen Paragraphen eingeführten

Polynome, so besteht für jedes ν die Gleichung

$$f = \frac{C_{\nu-1} + x D_{\nu-1} f_\nu}{A_{\nu-1} + x B_{\nu-1} f_\nu}. \tag{55.}$$

Für jede Größe ε vom absoluten Betrage 1 und für jede positive ganze Zahl n gelten ferner, wie man ohne Mühe beweisen kann, die Formeln

$$\begin{cases} \varepsilon f(x) = [x; \varepsilon\gamma_0, \varepsilon\gamma_1, \varepsilon\gamma_2, \dots], \\ f(\varepsilon x) = [x; \gamma_0, \varepsilon\gamma_1, \varepsilon^2\gamma_2, \dots], \\ x^n f(x) = [x; 0, 0, \dots, 0, \gamma_0, \gamma_1, \dots], \\ f(x^n) = [x; \gamma_0, 0, \dots, 0, \gamma_1, 0, \dots, 0, \gamma_2, 0, \dots]. \end{cases} \tag{56.}$$

In der vorletzten Gleichung stehen n Nullen vor γ_0, in der letzten ist die Anzahl der zwischen $\gamma_{\nu-1}$ und γ_ν einzuschiebenden Nullen gleich $n-1$.

Der Fall, daß eine der Zahlen $|\gamma_\nu|$ gleich 1 wird, oder daß alle γ_ν von einer gewissen Stelle an gleich 0 sind, führt nur auf die im vorigen Paragraphen behandelten rationalen Funktionen $f(x)$. *Es seien also alle Zahlen* $|\gamma_\nu|$ *kleiner als* 1 *und unendlich viele unter ihnen von Null verschieden.* Bezeichnet man mit $\varphi_\nu(x)$ die rationale Funktion

$$\varphi_\nu(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\nu] = \frac{C_\nu(x)}{A_\nu(x)},$$

so ist, wie wir schon im § 3 gesehen haben, für $|x| < 1$

$$f(x) = \lim_{\nu=\infty} \varphi_\nu(x), \tag{57.}$$

und hierbei ist die Konvergenz in jedem Kreise $|x| \leqq r < 1$ eine gleichmäßige. Die Formeln des vorigen Paragraphen gestatten uns, diese Gleichung noch anders zu schreiben. Aus (50.) folgt nämlich, indem man durch das für $|x| \leqq 1$ von Null verschiedene Produkt $A_\nu A_{\nu+1}$ dividiert,

$$\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu = \frac{\gamma_{\nu+1} p_\nu x^{\nu+1}}{A_\nu A_{\nu+1}}.$$

Für $|x| < 1$ ist daher wegen (57.)

$$f(x) = \varphi_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu) = \gamma_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu+1} p_\nu x^{\nu+1}}{A_\nu(x) A_{\nu+1}(x)}.$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die Reihe

$$|\gamma_0| + |\gamma_1| + |\gamma_2| + \cdots \tag{58.}$$

konvergent ist. Aus der Gleichung

$$A_\nu = A_{\nu-1} + \gamma_\nu x B_{\nu-1}$$

ergibt sich für $|x| \leqq 1$, wenn noch zur Abkürzung $|\gamma_\nu| = \alpha_\nu$ gesetzt wird,

$$|A_\nu| \leqq |A_{\nu-1}| + \alpha_\nu |B_{\nu-1}|.$$

Für $|x| = 1$ ist aber wegen (48.) und (51.) $|B_{\nu-1}| = |C_{\nu-1}| < |A_{\nu-1}|$, und daher

ist auch für $|x|<1$ stets $|B_{\nu-1}|<|A_{\nu-1}|$*). Folglich ist für jedes ν und für $|x|\leqq 1$

$$|A_\nu|\leqq(1+\alpha_\nu)\,|A_{\nu-1}|,$$

und hieraus ergibt sich, da $A_0=1\leqq 1+\alpha_0$ ist,

$$|A_\nu|\leqq(1+\alpha_0)\,(1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_\nu).$$

Die Formel (49.) liefert ferner für $|x|=1$

$$1-|\varphi_\nu|^2=\frac{p_\nu}{|A_\nu|^2}=\frac{(1-\alpha_0^2)\,(1-\alpha_1^2)\dots(1-\alpha_\nu^2)}{|A_\nu|^2}.$$

Daher ist für $|x|=1$ und umsomehr für $|x|<1$

$$1-|\varphi_\nu|^2\geqq\prod_{\lambda=0}^{\nu}\frac{1-\alpha_\lambda^2}{(1+\alpha_\lambda)^2}=\prod_{\lambda=0}^{\nu}\frac{1-\alpha_\lambda}{1+\alpha_\lambda}. \tag{59.}$$

Dies gilt für beliebige Werte der Parameter γ_ν. Ist aber die Reihe (58.) konvergent, so konvergiert das in (59.) rechts stehende Produkt mit wachsendem ν gegen eine positive, von Null verschiedene Zahl $\varkappa$. Für $|x|<1$ folgt nun aus (57.) und (59.)

$$1-|f(x)|^2\geqq\varkappa.$$

Die obere Grenze $M(f)$ der Funktion $f(x)$ im Kreise $|x|<1$ ist daher höchstens gleich $\sqrt{1-\varkappa}$, *also kleiner als* 1.

Wir können aber aus der Konvergenz der Reihe (58.) noch eine andere Folgerung ziehen. Aus (49.) folgt für $|x|=1$

$$|A_\nu|^2\geqq p_\nu,\qquad |A_{\nu+1}|^2\geqq p_{\nu+1}=p_\nu(1-\alpha_{\nu+1}^2),$$

also

$$\frac{1}{|A_\nu\,A_{\nu+1}|}\leqq\frac{1}{p_\nu\sqrt{1-\alpha_{\nu+1}^2}}.$$

Da aber die Funktion $\frac{1}{A_\nu A_{\nu+1}}$ sich im Kreise $|x|\leqq 1$ regulär verhält, so gilt diese Ungleichung auch für $|x|<1$. Für $|x|\leqq 1$ ist daher

$$\left|\frac{\gamma_{\nu+1}\,p_\nu\,x^{\nu+1}}{A_\nu\,A_{\nu+1}}\right|\leqq\frac{\alpha_{\nu+1}}{\sqrt{1-\alpha_{\nu+1}^2}}.$$

Da nun die mit Hilfe der rechtsstehenden Zahlen gebildete Reihe zugleich mit der Reihe (58.) konvergent ist, so ergibt sich, daß die Reihe

$$g(x)=\gamma_0+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\gamma_{\nu+1}\,p_\nu\,x^{\nu+1}}{A_\nu(x)\,A_{\nu+1}(x)}$$

---

*) Dies folgt auch aus der mit Hilfe der Gleichungen (47.) zu beweisenden Formel

$$\frac{B_{\nu-1}(x)}{A_{\nu-1}(x)}=[x;\bar\gamma_{\nu-1},\bar\gamma_{\nu-2},\dots,\bar\gamma_0].$$

im ganzen Kreise $|x| \leqq 1$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Sie stellt daher eine in diesem Kreise stetige Funktion dar, die im Innern des Kreises mit der Funktion $f(x)$ übereinstimmt. — Wir erhalten also den Satz:

XVIII. *Ist die Reihe $\Sigma \gamma_\nu$ absolut konvergent, so ist die Funktion $f(x)$ im Einheitskreise mit Einschluß des Randes stetig, und ihre obere Grenze $M(f)$ ist kleiner als* 1.

Es ist noch zu beachten, daß, wenn die Funktion $f(x)$ durch ihre Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

gegeben ist, die Reihe (58.) in der Form

$$|a_0| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\delta_\nu^2 - \delta_{\nu-1}\,\delta_{\nu+1}}}{\delta_\nu}$$

geschrieben werden kann, wobei

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_0 \\ \bar{a}_0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_0 \\ \bar{a}_0 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \cdots$$

zu setzen ist (vergl. § 4).

Allein aus der Stetigkeit von $f(x)$ im Kreise $|x| \leqq 1$ folgt die Konvergenz der Reihe (58.) gewiß noch nicht. Das zeigen schon die Beispiele

$$\frac{1+x}{2} = \left[x; \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \cdots\right], \qquad \frac{1}{2-x} = \left[x; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right].$$

In diesen beiden Fällen ist aber $M(f) = 1$. Ob nun aber $f(x)$ im Kreise $|x| \leqq 1$ stetig und außerdem $M(f) < 1$ sein kann, ohne daß die Reihe (58.) konvergiert, habe ich bis jetzt nicht zu entscheiden vermocht.

Ich will noch an einigen Beispielen zeigen, daß die hier eingeführte Parameterdarstellung uns in den Stand setzt, gewisse Klassen von Funktionalgleichungen in einfacher Weise zu behandeln. Es sei z. B. γ irgendeine Größe, die absolut kleiner als 1 ist, und n eine positive ganze Zahl. Setzt man in (54.)

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_{n+1} = \gamma_{n^2+n+1} = \gamma_{n^3+n^2+n+1} = \cdots = \gamma$$

und die übrigen Zahlen γ_ν gleich 0, so wird, wie aus der letzten der Formeln (56.) leicht hervorgeht,

$$f_1(x) = [x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots] = f(x^n),$$

also

$$f(x) = \frac{\gamma + x f(x^n)}{1 + \gamma x f(x^n)}.$$

Dieser Funktionalgleichung genügt offenbar nur eine, allein durch γ bestimmte Potenzreihe. Unsere Betrachtung lehrt aber, daß diese Potenzreihe für $|x| < 1$ konvergent ist und der Bedingung $M(f) \leqq 1$ genügt. Dasselbe gilt, wenn $|\gamma| < 1$ und $|\varepsilon| = 1$ ist, für die Funktionalgleichung

$$f(x) = \frac{\gamma + x f(\varepsilon x)}{1 + \bar{\gamma} x f(\varepsilon x)}.$$

Die einzige Potenzreihe, die ihr genügt, läßt nämlich die Darstellung

$$f(x) = [x; \gamma, \gamma, \varepsilon\gamma, \varepsilon^3\gamma, \ldots, \varepsilon^{\binom{\nu}{2}}\gamma, \ldots]$$

zu. Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die γ_ν sich periodisch wiederholen, d. h. bei gegebenem n der Bedingung $\gamma_\nu = \gamma_{\nu+n}$ genügen. Hierbei hat man anzunehmen, daß die Zahlen $|\gamma_0|, |\gamma_1|, \ldots, |\gamma_{n-1}|$ *kleiner* als 1 sind. Die Funktion $f(x)$ genügt dann, da $f_n = f$ wird, wegen (55.) der quadratischen Gleichung

$$x B_{n-1} f^2 + (A_{n-1} - x D_{n-1}) f - C_{n-1} = 0.$$

Man kann zeigen, daß *die Verzweigungsstellen dieser algebraischen Funktion sämtlich auf dem Rande des Einheitskreises liegen.*

*Riemann*sche Funktionen- und Differential-Systeme in der Ebene.

Arithmetischer Teil.

Von Herrn *Robert König* in Tübingen.

Werden in der Ebene s Punkte $a_\sigma (\sigma = 1, 2, \dots s)$ markiert und dazu s lineare homogene Substitutionen A_σ gegeben*), so ist dadurch eine *Klasse von Riemannschen Funktionensystemen* definiert, speziell eine *Klasse algebraischer Funktionen*, wenn die A_σ sämtlich Vertauschungssubstitutionen sind. Zu jedem Funktionensystem $y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ gehört ein *Differentialsystem* $dY = ydz$, im speziellen algebraischen Fall ein *Abelsches Differential.*

*Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, alle bei den algebraischen Funktionen und Differentialen bekannten Sätze, soweit sie zunächst arithmetischer Natur sind, auf eine beliebige Riemannsche Funktionen- und Differentialklasse auszudehnen***).*

In einem I. vorbereitenden Abschnitt wird der Nullstelle und Pol bei einer Funktion verallgemeinernde Begriff: *Funktionensystem Vielfaches eines Divisorensystems:* entwickelt. Es ist dazu nötig, für jede der Stellen a ein Fundamentalsystem $\overset{a}{y} = L^{-1}y$ und die Exponenten (1. Art) festzulegen. $L^{-1}AL = B$ hat die „Normalform". Die aus den „reduzierten" Exponenten gebildete Summe $\Sigma\Sigma\alpha - n + 1 = p$ nenne ich das *Geschlecht der Klasse;* sie ist die genaue Verallgemeinerung der aus dem wesentlichen Diskriminantenteiler hervorgehenden Definition der Geschlechtszahl im algebraischen Fall und spielt weiterhin dieselbe Rolle.

*) S. alles Nähere in § 1.

**) Der Fall $n = 2$ wurde von mir bereits früher erledigt: „Grundzüge einer Theorie der *Riemann*schen Funktionenpaare", Math. Ann. Bd. 78 (1917), S. 63—93, im folgenden kurz mit „R. F. P." zitiert. Vergl. bes. auch die Einleitung als Ergänzung zur jetzigen.

Im II. Abschnitt betrachte ich Systeme von n rational unabhängigen Funktionen der Klasse $(K)\left(H, \frac{\overset{a}{H}}{(z-a)^{\alpha}}\right) = \left(\eta_i^{(h)}, \frac{\overset{a}{\eta}_i^{(h)}}{(z-a)^{-\alpha_i}}\right)$ $i, h = 1, 2, \ldots n$ — Basissysteme — und die zugehörigen Moduln $\mathfrak{M}$. Basissysteme, zu denen derselbe Modul gehört, werden als äquivalent betrachtet und in eine Klasse vereinigt, Basisklasse (*Satz 1—3*). Die Untersuchung der Matrix $\left(H, \frac{\overset{a}{H}}{(z-a)^{\alpha}}\right)$ an einer Stelle und im Großen liefert die *Sätze 4—10* über Spalten-, Zeilen-, Determinanten- und Elementar-Teiler an einer Stelle und die *Sätze 11—13* im Großen. Es gibt *ausgezeichnete Moduln* von der Eigenschaft, daß ihre Zeilenteiler an jeder endlichen Stelle den Elementarteilern abgesehen von der Reihenfolge gleich sind. Über diese ausgezeichneten Moduln besteht das *Theorem I*, welches jedem Modul einen Divisor zuordnet und umgekehrt, nebst den zahlreichen Folgerungen § 9, *Satz 14—16*, und § 10. Im Bereiche der ausgezeichneten Moduln läßt sich ferner vermöge der erwähnten Zuordnung eine Komposition und Zerlegung definieren, welche sozusagen eine „*Idealtheorie*“ *für eine beliebige Riemannsche Funktionenklasse darstellt* (S. 164).

In der zu (K) komplementären Klasse $(\breve{K})$ mit den komplementären (= kontragredienten) Substitutionen $\breve{A}_\sigma$ betrachte ich jetzt (§ 11) das System $\left(\dot{H}, \frac{\overset{\dot{a}}{\dot{H}}}{(z-a)^{-\alpha}}\right)$, wobei $H = \breve{H}$, $\overset{\dot{a}}{\dot{H}} = \dot{L}^{-1}\dot{H}$ und $\dot{L}^{-1}\breve{A}\dot{L} = \dot{B}$ die Normalform hat. Besteht B bezw. $\overset{a}{H}$ aus lauter eingliedrigen Ketten, dann ist $\dot{L} = \breve{L}$, sonst $= \breve{L}T$, wobei T wieder festzulegen ist. Die Untersuchung der Teiler von $\dot{\mathfrak{M}}$ liefert die *Sätze 18—20*. Den Zusammenhang zwischen den so definierten ausgezeichneten Moduln $\mathfrak{M}$ und $\dot{\mathfrak{M}}$ von (K) und $(\breve{K})$ gibt *das Theorem II*. Hierbei ist aber notwendigerweise vorausgesetzt, daß es sich um „*Eigenmoduln*“ bezw. „*Eigendivisoren*“ von (K) und $(\breve{K})$ handelt, d. h. solchen, deren Zeilenteiler an einer Stelle je innerhalb einer Kette gleich sind. Führt man durch $\breve{\alpha}_i = -\alpha_i + \varepsilon_i$ die reduzierten Exponenten der Klasse $(\breve{K})$ ein, so erhält man in $\mathfrak{Z} = II\begin{Bmatrix} \mathfrak{a}_1^{\varepsilon_1} \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\varepsilon_n} \end{Bmatrix}$ *den Verzweigungsteiler des Klassenpaares* $(K), (\breve{K})$, welcher die Verallgemeinerung desselben Teilers bei den algebraischen Funktionen darstellt und das *Theorem II* in der *Gestalt II a*.

Nun kann für die *Differentiale* $\left(ydz, \frac{\overset{a}{y}dz}{(z-a)^a}\right)$ der Klasse (K) vermittelst $\mathfrak{Z}$ und des *Differentialteilers* $\mathfrak{W} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}_z^2}$ *der Begriff des Vielfachen eines Divisorensystems* aufgestellt werden (§ 13) und *Theorem III*, die *Verallgemeinerung des Riemann-Rochschen Satzes* bei den algebraischen Funktionen, liefert den Zusammenhang zwischen den Funktionen von (K) und den Differentialen von $(\breve{K})$. Schließlich folgen noch drei *Reziprozitätssätze.* Der erste (*Theorem IV*) lehrt den Zusammenhang zwischen den Geschlechtern zweier zueinander komplementären Klassen, der zweite (*Theorem V*) zwischen den Funktionen von (K) und $(\breve{K})$ und der dritte (*Theorem VI*) zwischen den Differentialen von (K) und $(\breve{K})$. Hiebei handelt es sich immer um Vielfache von Eigendivisoren der Klassen. (VI) kann als die Verallgemeinerung des *Brill-Noetherschen Reziprozitätssatzes* aufgefaßt werden, während (IV) die Tatsache verallgemeinert, daß die Ordnung des Verzweigungsdivisors bei den algebraischen Funktionen (oder die Anzahl der Nullstellen eines *Abel*schen Differentials) $2p-2$ ist.

Vorstehende Sätze und Theoreme auf den Fall angewendet, daß sämtliche A_σ Vertauschungssubstitutionen sind, ergeben eine *neue Theorie der algebraischen Funktionen und Differentiale rein von der Gruppe aus* als dritten Weg neben den beiden andern, welche von der Gleichung oder von der *Riemann*schen Fläche ausgehen*). Diese Theorie ist nicht nur besonders durchsichtig, weil sie die algebraischen Funktionen und Differentiale als Glied einer höhern Mannigfaltigkeit erscheinen und genau trennen läßt, was von der Klasseneigenschaft und was speziell von der Körpereigenschaft herrührt, sondern auch allgemeiner als die bisherigen, was an der allgemeinen Fassung des Begriffs des Multiplums liegt. Wie im *III. Abschnitt* gezeigt wird, muß dieser Begriff für Funktionen (*Satz 21, 22*) und Differentiale (*Satz 23, 24*) in geeigneter Weise spezialisiert werden, um die gewöhnliche Theorie**) zu erhalten. Vorher muß auch schon die Wahl des Fundamentalsystems $\overset{a}{y}$ in bestimmter, spezieller Weise geschehen.

---

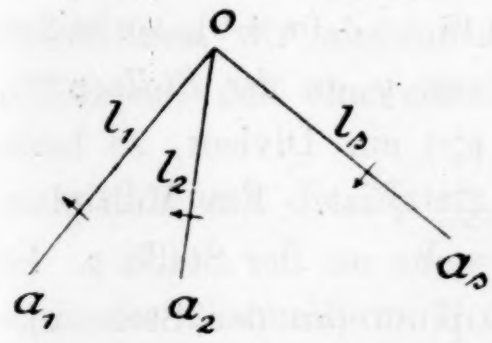
*) Vergl. den Bericht von *A. Brill* und *M. Noether* über „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen". Jahresber. d. D. Math. Ver. 3. Bd. 1894.

**) Vergl. die Theorie von *K. Hensel* in dem Werk: „Theorie der algebraischen

Alsdann stellt die Lehre von den algebraischen Funktionen und den linearen homogenen Differentialgleichungen vom *Fuchs*schen Typus oder besser den *Riemann*schen Funktionensystemen, welche sich bisher nur getrennt oder in mehr oder weniger „Analogien" nebeneinander entwickelt haben, eine Einheit dar.

I. Abschnitt: *Riemann*sche Funktionen- und Differential-Systeme n-ter Ordnung.

§ 1. Definition.



Es seien in der Ebene K der komplexen Variabeln $z = x + iy$ $s \geqq 2$ im Endlichen gelegene Punkte $a_\sigma (\sigma = 1, 2, \ldots s)$ markiert; hierauf werde K in der durch nebenstehende Figur skizzierten Weise zu K' zerschnitten und jedem Schnitt l_σ eine Matrix A_σ von n^2 komplexen Zahlen mit nicht verschwindender Determinante und der Bedingung

$$A_s A_{s-1} \ldots A_1 = E \tag{1.}$$

zugeordnet. Ein *Riemann*sches Funktionensystem n-ter Ordnung ($n \geqq 2$) $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ ist dann durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

1. Im Innern von K' sind die y_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ eindeutige, bis auf Pole reguläre analytische Funktionen von z.

2. Abgesehen von den Punkten a_σ lassen sie sich über die Schnitte l_σ analytisch fortsetzen und erfahren hiebei (in der Pfeilrichtung) die Substitutionen $y^* = A_\sigma y$.

3. In den Punkten a_σ verhalten sie sich „bestimmt" (S. unten).

Zu jedem System von Funktionen gehört das System ihrer Integrale $I = (I_1, I_2, \ldots I_n) = (\int_{z_0}^{z} y_1 dz, \ldots \int_{z_0}^{z} y_n dz)$ bezw. das System der Differen-

---

Funktionen einer Variabeln" von *Hensel* und *Landsberg*, Leipzig 1902. Scharf getrennt ist sie jedoch von der Formentheorie bei *E. Ritter*: „Über *Riemann*sche Formenscharen auf einem beliebigen algebraischen Gebilde", Math. Ann. Bd. 47 (1895) S. 157—221. Hier auf *Scharen* bez. Definitionen, Begriffe, Exponenten etc., dagegen beim Verf. *Systeme*, deren Zweige auch genau *der Reihenfolge nach* festgelegt sind; das letztere ist nötig, wenn der algebraische Fall eingeordnet werden soll.

tiale $dI = (dI_1, \dots dI_n) = (y_1 dz, \dots y_n dz)$. Der Kürze halber sprechen wir im folgenden statt von dem System der Funktionen y_i von „der Funktion y" mit ihren „Zweigen" y_i*).

§ 2. Fundamentalsystem für eine Verzweigungsstelle.

Wie im Fall $n = 2$ überdecken wir K bezw. K' mit n Blättern K_i bezw. K_i' und breiten die n Zweige y_i darauf aus. Die Punkte von K und K_i bezeichnen wir mit kleinen deutschen Buchstaben, z. B. die Stelle $z = p$ auf K mit $\mathfrak{p}$, die auf K_i darüberliegenden Punkte mit $\mathfrak{p}_i$.

Lautet an der zunächst von den a_σ verschiedenen Stelle $\mathfrak{p}$ mit der Ortsuniformisierenden t die Entwicklung von $y_i = a_i t^{g_i} + \cdots$ $(a_i \neq 0)$, so heißen die ganzen Zahlen g_i *die Exponenten* (1. Art) *von y an der Stelle $\mathfrak{p}$***). Sind λ_i beliebige ganze Zahlen und $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{p}_1^{\lambda_1}, \dots \mathfrak{p}_n^{\lambda_n})$ ein Divisor, so heißt *y ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$ an der Stelle $\mathfrak{p}$*, wenn $g_i \geqq \lambda_i$ ist. Ein Multiplum von $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{p}_1^0, \dots \mathfrak{p}_n^0) = 1$ heißt speziell endlich oder ganz an der Stelle $\mathfrak{p}$. Ist $g_i = \lambda_i$, so sprechen wir von einem *genauen* Multiplum (an der Stelle $\mathfrak{p}$).

Nun sei a eine von den Stellen a_σ und $A = (a_{ik})$ die zugehörige Substitution,

$$(2.) \qquad |u E - A| = \varphi(u) = (u - e_1)^{\nu_1} (u - e_2)^{\nu_2} \dots = 0$$

die charakteristische Gleichung. Ist $\psi(A) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der die Matrix A genügt, so ist nach *Frobenius****)

$$\psi(u) = (u - e_1)^{\mu_1} (u - e_2)^{\mu_2} \dots \text{ und } 0 < \mu_1 \leqq \nu_1$$
$$0 < \mu_2 \leqq \nu_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Setzen wir

$$e_1 E - A = \mathsf{A}_1, \qquad e_2 E - A = \mathsf{A}_2, \dots$$

---

*) Existenzbeweise hat man mit verschiedenen Methoden in mehr oder weniger weitem Umfange erbracht: Kontinuitätsmethode (*Schlesinger*), Kombinatorische Methode (*Frym-Rost*), Integralgleichungen (*J. Plemelj*), *Dirichlet*sches Prinzip (*O. Haupt*) u. a. s. *O. Haupt* „Zur Theorie der *Prym*schen Funktionen 1. u. N. Ordnung", Math. Ann. Bd. 77 (1915) S. 44 ff. und „Bemerkungen über die Integrale *Riemann*scher Funktionenscharen", Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. Wiss. Math.-naturw. Klasse 1914.

**) Zum Unterschied von den im allgemeinen völlig verschiedenen Exponenten (2. Art) der Schar $(y_1, \dots y_n)$ oder der Differentialgleichung für y.

***) Über den Rang einer Matrix, Ber. d. K. Pr. Akad. d. Wiss. phys.-math. Klasse 1911, II S. 20–29 u. S. 128–129.

so ist nach ***Frobenius****) der Rang von $\mathsf{A}_1^{\mu_1}$ gleich $n - \nu_1$ und daher die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von

$$\mathsf{A}_1^{\mu_1} x = 0$$

gleich ν_1. Seien

$$p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots p_{\nu_1}^{(1)}$$

die Normallösungen**) von (4.), welche in eine gewisse Anzahl von Ketten zerfallen, jeweils bestehend aus einer „primitiven" Lösung**) p und den daraus sukzessive „abgeleiteten" Lösungen**) $\mathsf{A}p, \mathsf{A}^2p, \dots$. Analog für

$$\mathsf{A}_2^{\mu_2} x = 0$$

$$p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \dots p_{\nu_2}^{(2)} \text{ u. s. w. } \nu_1 + \nu_2 + \dots = n.$$

Bezeichnen wir alsdann diese n Lösungen in irgendeiner Reihenfolge — jedoch so, daß eine einzelne Kette nicht auseinandergerissen wird — mit

$$p, p', p'', \dots,$$

so wird durch die Matrix

$$(5.) \qquad L = (p, p', p'', \dots), \qquad |L| \neq 0$$

A in die Normalform B transformiert***):

$$(6.) \qquad L^{-1} A L = B.$$

B zerfällt entsprechend den Ketten von L in Partialsysteme***)

$$(7.) \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Angenommen etwa, die $\varkappa$ ersten der p gehörten zur Wurzel e_1 und bildeten eine $\varkappa$-gliedrige Kette, so ist für $\varkappa = 1$ $B_1 = e_1$ und für $\varkappa > 1$

$$(8.) \qquad B_1 = \begin{vmatrix} e_1 & & & \\ 1 & e_1 & & \\ & 1 & e_1 & \\ & & \dots & \\ & & & 1\ e_1 \end{vmatrix} \quad \varkappa \text{ Zeilen und Spalten.}$$

An L haftet die Willkür, mit der einerseits die Auswahl der primitiven von den Lösungen p noch möglich ist und andrerseits die Willkür, die in der verschiedenen Anordnung der Lösungen p — mit obiger Einschränkung — liegt. Während der erstere Umstand keinen Einfluß auf die Gestalt von

---

*) s. ebenda S. 26.
**) s. ebenda S. 27.
***) s. ebenda S. 28.

B ausübt, bleibt dem letzteren zufolge die Reihenfolge der Partialsysteme in B willkürlich, sonst nichts.

Wir entscheiden uns für eine bestimmte Wahl von L (und damit von B) *und nennen das Funktionensystem* $L^{-1}\,y$ *kurz* $\overset{a}{y}$. Dasselbe erfährt die Substitution

$$\overset{a}{y}{}^{*} = B\,\overset{a}{y}.$$

Betrachten wir ein Partialsystem von B — etwa unter obiger Annahme wieder das erste B_1 — so verhalten sich die Funktionen

$$(9.)\qquad \begin{aligned} \overset{a}{z}_1 &= \overset{a}{y}_1 \\ \overset{a}{z}_2 &= \overset{a}{y}_2 - \frac{1}{2\pi i.e_1}\lg(z-a)\,\overset{a}{z}_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{a}{z}_\varkappa &= \overset{a}{y}_\varkappa - \frac{1}{2\pi i.e_1}\lg(z-a)\,\overset{a}{z}_{\varkappa-1} \end{aligned}$$

rein multiplikativ mit dem Faktor

$$(10.)\qquad e_1 = e^{2i\pi.\alpha_1},\ 0 \leqq \alpha_1' < 1;\ \alpha_1 = \alpha_1' + i\,\alpha_1''$$

und gestatten nach Voraussetzung 3. (§ 1) eine Entwicklung der Gestalt

$$\overset{a}{z}_k = (z-a)^{\alpha_k} P_k(z-a) \text{ bezw.*) } = (z-a)^{\mathsf{A}_k}\,\tilde{\mathfrak{P}}_k(z-a),\quad {\scriptstyle k=1,2,\ldots\varkappa}$$

wobei

$$(11.)\qquad \alpha_k = \alpha_1,\ \mathsf{A}_k = \alpha_k + h_k,\ \tilde{\mathfrak{P}}_k(0) \neq 0$$

und P_k Potenzreihen sind, die wegen Voraussetzung 3. (§ 1) höchstens endlich viele negative Potenzen enthalten.

Analog für die andern Ketten. Die durch (10.) normierten $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots n)$ heißen die *„reduzierten Exponenten"*, die A_i (11.) die *Exponenten (1. Art)* des Systems $\overset{a}{y}$ an der Stelle a. Beide sind — ebenso wie die $\overset{a}{y}_i$ selbst — auch der Reihenfolge nach festgelegt, die α_i insbesondere *Klasseninvarianten* (s. § 3).

Ist jetzt $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{a}_1^{\lambda_1}, \ldots \mathfrak{a}_n^{\lambda_n})$ wieder ein beliebiger Divisor und $\tilde{\sigma}_i = \alpha_i + g_i$, wo g_i beliebige ganze Zahlen, insbesondere Null sind, so heißt *das System*

---

*) Das letztere nur, wenn $\overset{a}{z}_k$ nicht identisch Null ist, was jedoch vorkommen kann, wenn die y_i linear abhängig sind.

$\frac{y}{t^{\bar{a}}}$ *ein Multiplum von* $\mathfrak{Q}$ *an der Stelle* a, wenn $\frac{z}{t^{\bar{a}}}$ ein solches im früheren Sinne ist.

§ 3. Klasseneinteilung.

Alle Funktionensysteme, welche an den gegebenen Punkten a_σ dieselben Substitutionen A_σ erfahren, denken wir uns mit *Riemann* in einer *Klasse* (K) n-ter Ordnung vereinigt. Die Systeme von n rationalen Funktionen bilden die einfachste Klasse (E). Die Klasse mit den zu A_σ komplementären Substitutionen $\breve{A}_\sigma$ (d. h. den konjugierten der reziproken A_σ^{-1}) sei $(\breve{K})$*). Es ist $\breve{(\breve{K})} = K$, und die Klassen ordnen sich demnach zu *Paaren*, bestehend aus *zwei zueinander komplementären Klassen*, zusammen, wobei jedoch auch $(K) = (\breve{K})$ sein kann. Ist speziell jedes A_σ gleich einer Vertauschungssubstitution, so ist (K) *eine Klasse algebraischer Funktionen*, für welche — wie leicht zu sehen — $\breve{A}_\sigma = A_\sigma$ und daher stets $(\breve{K}) = (K)$ ist. Zerfallen die sämtlichen A_σ in der gleichen Weise in Partialsysteme, welche sich nur untereinander substituieren, so heiße die Klasse *zerfallend*. (K) und $(\breve{K})$ zerfallen gleichzeitig. *Wir können und wollen uns im folgenden auf nicht zerfallende Klassen n-ter Ordnung beschränken* (d. h. im algebraischen Fall auf zusammenhängende algebraische Gebilde). Es kann vorkommen, daß in einer solchen Klasse die Zweige eines Systems linear abhängig sind (z. B. im algebraischen Fall bei dem System $y = (1, 1, \ldots 1)$); dann kommt das System (ganz oder teilweise) schon in einer Klasse von niedrigerer als der n-ten Ordnung vor**).

Die Funktionen einer Klasse besitzen die Eigenschaft: mit y kommt auch $R(z) \cdot y$ und $\frac{dy}{dz}$, mit $y^{(1)}$ und $y^{(2)}$ auch $y^{(1)} + y^{(2)}$ in der Klasse vor (*Klasseneigenschaft*). Da die B_i und die α_i bis auf die Reihenfolge schon

---

*) In der Sprache der Differentialgleichungen die „Adjungierte“ oder 1. Assoziierte; $(K) = (\breve{K})$ der sich selbst adjungierte Fall. Auf die höheren Assoziierten gehen wir der Kürze halber nicht ein. S. darüber *L. Schlesinger*, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig 1897, Bd. II 1 S. 125 ff.

**) Die letztere Tatsache zeigt, daß der Reduktibilitätsbegriff bei den algebraischen Gleichungen sich in unserem höheren Gebiete in 2 völlig getrennte Dinge auflöst: das Zerfallen und das Vorkommen in Klassen niedrigerer Ordnung.

durch die Klasse festgelegt sind und für eine Stelle a

$$|A| = |B| = e^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i},$$

so ist wegen (1.) die über alle Punkte a_σ erstreckte Summe $\sum_{(\sigma)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ eine nichtnegative ganze Zahl; wir setzen

$$\sum_{\sigma)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - n + 1 = p \tag{12.}$$

und nennen p **das Geschlecht der Klasse;** es ist die wichtigste *Klasseninvariante.*

II. Abschnitt. Funktionen und Differentiale innerhalb einer Klasse.

§ 4. Die Klassenbasis.

Seien $\eta^{(h)}$ $(h = 1, 2, \ldots H)$ Funktionen von (K) und $H = (\eta_i^{(h)})$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ ihre Matrix. Das System $\eta^{(h)}$ heißt *rational abhängig*, wenn eine Gleichung der Form

$$R_1 \eta^{(1)} + R_2 \eta^{(2)} + R_H \eta^{(H)} = 0 \text{ oder kurz } HR = 0$$

mit nicht lauter identisch verschwindenden rationalen Funktionen R_h besteht. Ist $Z = (\zeta_i^{(h)})$ ein zweites, mit H durch die Gleichung $Z = NH$ verknüpftes System ($N = (n_{ik})$ und $n_{ik} (i, k = 1, 2, \ldots n)$ Konstante) so folgt aus $HR = 0$ $ZR = 0$ und umgekehrt, wenn $|N| \neq 0$; speziell für $N = L^{-1}$ folgt, daß eine Gleichung

$$HR = 0 \text{ immer die andere } \overset{a}{H}R = 0$$

nach sich zieht und umgekehrt.

Wir nehmen nun speziell $H = n$ und betrachten die Determinante $|H|$; sie ist eine multiplikative Funktion, u. zw. ist $|H|^* = |A| \cdot |H|$, $|\overset{a}{H}|^* = |B| \cdot |\overset{a}{H}|$.

Satz 1: *Ein n-gliedriges System ist dann und nur dann rational unabhängig, wenn seine Determinante nicht identisch verschwindet.*

Besteht eine Gleichung $HR = 0$, dann folgt $|H| = 0$; um das Umgekehrte zu beweisen, nehmen wir an, der Rang von $|H|$ sei $\varrho < n$ und etwa $|H_\varrho| = |\eta_i^{(k)}| \neq 0$, $(i, k = 1, 2, \ldots \varrho)$. Wir bekommen ein nicht identisch

verschwindendes Lösungssystem der ϱ ersten von den Gleichungen $HR = 0$ mit den Unbekannten $R_h (h = 1, 2, \dots n)$, wenn wir nehmen:

$$R_{\varrho+1} = 1, \; R_{\varrho+2} = \cdots = R_n = 0,$$

wodurch auch

$$R_1, R_2, \dots R_\varrho$$

bestimmt sind. Da, wie man leicht zeigt,

$$R_1^* = R_1, \dots R^* = R_\varrho,$$

sind $R_1, \dots R_n$ *rationale* Funktionen, w. z. b. w.

Ein System $\eta^{(1)}, \dots \eta^{(m)}$ heißt eine *Basis der Klasse*, wenn sich sämtliche Funktionen von (K) in der Form

$$\eta = c_1 \eta^{(1)} + \cdots + c_m \eta^{(m)}$$

— $c_1, \dots c_m$ rationale Funktionen —

darstellen lassen.

Satz 2: *Eine Klasse n-ter Ordnung kann nicht durch eine Basis von weniger als n Elementen dargestellt werden.*

Denn sonst wäre die aus n beliebigen Funktionen der Klasse gebildete Determinante identisch Null, was dem Existenzsatz widerspricht *).

Satz 3: *Dagegen sind $n+1$ Funktionen stets rational abhängig, ein n-gliedriges rational unabhängiges System also eine Basis.*

Ist nämlich η eine beliebige Funktion von (K), so folgt sofort, daß sich aus den Gleichungen $HR = \eta$ die R als *rationale* Funktionen ergeben.

Zwei Basen H, Z sind stets durch eine Gleichung $Z = HP$ verknüpft. Die Elemente von $P = (\varrho_{ik})$ sind rationale Funktionen und $|P| \neq 0$.

Ist $(\eta) = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ eine Basis, so bildet die Gesamtheit der durch (η) mit *ganzen* rationalen Funktionen in der Form

$$\eta = u_1 \eta^{(1)} + \cdots + u_n \eta^{(n)}$$

darstellbaren Funktionen den zu (η) gehörigen Modul $[\eta]$. Zwei Basen (η), (ζ), für welche $[\eta] = [\zeta]$, heißen *äquivalent*; die notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz von H und Z ist das Bestehen einer Gleichung $Z = HP$ mit *ganzen* rationalen ϱ_{ik} und $|P| =$ konst. $(\neq 0)$. Da für drei Basen (η), (ζ), (ϑ) gilt

$$(\eta) \sim (\eta); \; (\eta) \sim (\zeta), (\zeta) \sim (\eta); \; (\eta) \sim (\zeta), (\zeta) \sim (\vartheta), (\eta) \sim (\vartheta),$$

*) S. *Plemelj*, *Riemann*sche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. Monatshefte für Math. und Phys. 19. Jahrg. S. 240/1.

so können äquivalente Basen in eine Klasse, nicht äquivalente in verschiedene Klassen getan werden. *Die Basissysteme einer Klasse* (K) *können demnach in verschiedene Klassen aufgeteilt werden.*

§ 5. Die Moduln. Spalten-, Zeilen-, Elementar-Teiler.

Wir betrachten jetzt eine Basis (η) in der Umgebung einer beliebigen Stelle mit der Ortsuniformisierenden $t\left(=z-a \text{ bezw. } \frac{1}{z}\right)$; der Allgemeinheit wegen wählen wir eine Stelle a. Dann laute die Entwicklung von $\left(\frac{\overset{a}{\eta}^{(1)}}{t^{\alpha}}\right)$:

$$\frac{\overset{a}{\eta}_1^{(1)}}{t^{\alpha_1}} = e_{11}\, t^{r_1} + \cdots$$

$$\frac{\overset{a}{\eta}_2^{(1)}}{t^{\alpha_2}} = e_{21}\, t^{r_1} + \cdots \text{ wobei mindestens ein } e_{i1} \neq 0 \text{ sei.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\overset{a}{\eta}_n^{(1)}}{t^{\alpha_n}} = e_{n1}\, t^{r_1} + \cdots$$

Bilden etwa wie in § 2 die ersten $\varkappa$ Zweige eine Kette, so ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\varkappa$, und zu dem 2-ten, ... bis $\varkappa$-ten Zweig können nach (9.) logarithmenbehaftete Glieder treten, welche nicht hingesetzt sind. Ebenso für jede andere Kette und analog für $\overset{a}{\eta}^{(2)}, \ldots \overset{a}{\eta}^{(n)}$. $t^k (k = 1, 2, \ldots n)$ *heißt der Spaltenteiler von* $\frac{\overset{a}{\eta}^{(k)}}{t^{\alpha}}$ *an der Stelle* a. Es ist dann

$$\frac{\left|\overset{a}{\eta}_i^{(k)}\right|}{t^{\Sigma \alpha_i}} = |e_{ik}|\, t^{\Sigma r_k} + \cdots = \delta t^d + \cdots \qquad \delta \neq 0$$

und

$$\Sigma r_k \leqq d.$$

Besteht das Gleichheitszeichen oder ist $|e_{ik}| \neq 0$, dann heißt das System $\left(\frac{\overset{a}{\eta}}{t^{\alpha}}\right)$ *spaltennormal* an der Stelle a*). Beim Übergang zu einem äquivalenten System ist d invariant, während sich die r_k natürlich ändern können. Hierüber gilt

*) Vergl. „*Hensel-Landsberg*“, a. a. O. S. 167.

Satz 4: *In einer Klasse von Basissystemen* (η) *bezw.* $\left(\frac{\overset{a}{\eta}}{t^\alpha}\right)$ *gibt es stets ein in bezug auf eine beliebige Stelle spaltennormales, u. zw. ein solches, wo das Schema der Anfangskoeffizienten* c_{ik} *folgende Gestalt hat* (α-*dreieckiges normales System**)):

$$(c_{ik}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Der Beweis ist ganz analog zu führen wie im algebraischen Fall**). Auch der Satz, daß für ein bei $t = 0$ spaltennormales System (η) bezw. $\left(\frac{\overset{a}{\eta}}{t^\alpha}\right)$ der Teiler einer beliebigen Funktion des Moduls $\vartheta = u_1 \eta^{(1)} + \dots u_n \eta^{(n)}$ bezw. $\frac{\overset{a}{\vartheta}}{t^\alpha} = u_1 \frac{\overset{a}{\eta^{(1)}}}{t^\alpha} + \dots u_n \frac{\overset{a}{\eta^{(n)}}}{t^\alpha}$ gleich dem größten gemeinschaftlichen Teiler der Summanden ist, gilt unverändert**).

Wir betrachten wieder die Matrix $(\eta_i^{(k)})$ bezw. $\frac{\overset{a}{\eta_i^{(k)}}}{t^{\alpha_i}}$, jetzt aber nicht hinsichtlich ihrer Anordnung in Spalten, sondern hinsichtlich der daraus zu bildenden Determinanten. Wie oben die Kolonnenteiler, bekommen wir jetzt die *Determinantenteiler* der Matrix an der Stelle a: $t^{d_1}, t^{d_2}, \dots t^{d_n}$ $(d_n = d)$ wo t^{d_k} die niedrigste Potenz, mit der die Entwicklung einer Determinante k-ten Grades beginnt (bei Beiseitelassung der logarithmenbehafteten Glieder), und daraus die *Elementarteiler* der Matrix bei a: $t^{e_1} = t^{d_1}$, $t_2^{e_2} = t^{d_2 - d_1}, \dots t^{e_n} = t^{d_n - d_{n-1}}$. Unter den vielen hierüber gültigen Tatsachen***) erwähnen wir nur den einen

Satz 5: *Es ist stets* $e_1 \leqq e_2 \leqq \dots \leqq e_n$.

Der Zusammenhang mit den Kolonnenteilern wird vermittelt durch folgenden — ganz wie bei den algebraischen Funktionen†) zu beweisenden —

---

*) Die durch das Schema ◺, ◸, ◿, ▽ skizzierten Systeme mögen bezw. als α-, β-, γ-, δ-dreieckig unterschieden werden.

**) s. *Hensel-Landsberg*, 11. Vorlesung.

***) s. z. B. *Frobenius*, Über die Elementarteiler der Determinanten, Sitz.-Ber. d. K. Preuß. Ak. d. Wiss. Berlin, Math.-phys. Klasse 1894, II. S. 31—44.

†) s. *Hensel-Landsberg*, a. a. O., 12. Vorlesung.

Satz 6: *Ist das System* $\left(\frac{\overset{a}{\eta}}{t^a}\right)$ *an der Stelle a spaltennormal und sind* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ *die Exponenten seiner Spaltenteiler der Größe nach geordnet, so ist* $e_1 = \varrho_1, e_2 = \varrho_2, \ldots e_n = \varrho_n$.

Angenommen, es handle sich jetzt um eine *endliche* Stelle und gehen wir von dem System (η) zu einem äquivalenten über; dann besteht der

Satz 7: *Determinanten- und Elementarteiler sind für äquivalente Systeme gleich; daher erhält man bei der Transformation eines Systems in ein normales allemal auch dieselben Kolonnenteiler.*

In dritter Linie betrachten wir unsere Matrix an einer beliebigen Stelle — der Allgemeinheit wegen wieder a — hinsichtlich ihrer Anordnung nach *Zeilen.* Man hat

$$(14.) \qquad \frac{\overset{a}{\eta_1^{(1)}}}{t^{\alpha_1}} = d_{11}\, t^{\delta_1} + \cdots, \frac{\overset{a}{\eta_1^{(2)}}}{t^{\alpha_1}} = d_{12}\, t^{\delta_1} + \cdots, \frac{\overset{a}{\eta_1^{(n)}}}{t^{\alpha_1}} = d_{1n}\, t^{\delta_1} + \cdots,$$

wobei mindestens ein $d_{1k} \neq 0$ sei; analog für die andern Zeilen unter Weglassung der eventuell vorhandenen logarithmischen Teile.

Wir erhalten so die *Zeilenteiler* $t^{\delta_1}, t^{\delta_2}, \ldots t^{\delta_n}$, und es ist wieder $\Sigma\delta_i \leqq d$. Besteht das Gleichheitszeichen, oder ist $|d_{ik}| \neq 0$, dann heißt das System „*zeilennormal*" an der Stelle a. Den Zusammenhang mit den Elementarteilern vermittelt folgender

Satz 8: *In einem zeilennormalen System sind die der Größe nach geordneten Zeilenteiler gleich den Elementarteilern.*

Nehmen wir die Bezeichnung so, daß $\delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \ldots \leqq \delta_n$, so ist $d_1 = \delta_1$, $d_2 \geqq \delta_1 + \delta_2$, $d_3 \geqq \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$, u. s. w. also $e_1 = \delta_1$, $e_2 \geqq \delta_2, \ldots e_n \geqq \delta_n$. Wäre nun im Falle $\Sigma\delta_i = d$ auch nur ein $e_i > \delta_i$, so wäre $\Sigma e_i > d$, was wegen $\Sigma e_i = d$ ausgeschlossen ist. Hieraus folgt in Verbindung mit Satz 6

Satz 9: *In einem gleichzeitig zeilen- und spaltennormalen System stimmen die der Größe nach geordneten Zeilenteiler mit den der Größe nach geordneten Spaltenteilern überein.*

Sei jetzt die betrachtete Stelle speziell eine *endliche* und $(\eta), (\tilde{\eta})$ zwei äquivalente Basen; dann folgt $\tilde{\delta}_i \geqq \delta_i$ sowohl als auch $\delta_i \geqq \tilde{\delta}_i$, also $\tilde{\delta}_i = \delta_i$. Das gibt den

Satz 10: *Die Zeilenteiler an einer endlichen Stelle sind invariant.*

§ 6. Dieselben im Großen.

Die im vorigen Paragraphen „im Kleinen" angestellten Untersuchungen ergeben — für alle endlichen Stellen durchgeführt — folgende Resultate „im Großen":

Satz 11: *Jeder Klasse von Basissystemen* $\left(\eta; \frac{\eta}{t^\alpha}\right)$ *entsprechen n endliche*) Divisoren* $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{a}^{d_i} \ldots \mathfrak{b}^{d'_i} \ldots (i = 1, 2, \ldots n)$, *„die zusammengesetzten Determinantenteiler" und n endliche Divisoren* $\mathfrak{E}_i (\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{D}_1, \mathfrak{E}_i = \frac{\mathfrak{D}_i}{\mathfrak{D}_{i-1}}, 1 < i \leqq n)$, *„die zusammengesetzten Elementarteiler".*

Der Punkt a ist hierbei als Repräsentant der Stellen a_σ, und b als Repräsentant der übrigen endlichen Stellen mit von 0 verschiedenen d'_i gesetzt.

Da speziell der n-te Determinantenteiler auch für die unendlich ferne Stelle in allen äquivalenten Basen derselbe ist, so entspricht jeder Klasse $\left(\eta; \frac{\eta}{t^\alpha}\right)$ auch der *alle* Punkte umfassende Divisor

$$\mathfrak{D}'_n = \mathfrak{a}^{d''_n} \ldots \mathfrak{b}^{d'_n} \ldots \mathfrak{p}_\infty^{d''_n},$$

den wir den vollständigen n-ten Determinantenteiler nennen. Nun ist

$$\Sigma d_n + \cdots + \Sigma d'_n + \cdots + d''_n = -\Sigma\Sigma\alpha$$

und daher besteht der

Satz 12: *Die Ordnung des vollständigen n-ten Determinantenteilers ist für alle Basisklassen dieselbe.*

Wählen wir als Basis speziell $\eta, \frac{d\eta}{dz}, \ldots \frac{d^{n-1}\eta}{dz^{n-1}}$ — wofern die n Zweige von η linear unabhängig sind —, so folgt als

*Korollar**): Obiger Teiler, bezw. seine Ordnung ist für alle Funktionen der Klasse* (mit linear unabhängigen Zweigen) *derselbe, u. zw. gleich* $-\Sigma\Sigma\alpha$. *(Klasseninvariante).*

---

*) Ein Divisor heißt „endlich", wenn er die unendlich fernen Stellen nicht enthält.

**) Dasselbe deckt sich mit der sog. „*Fuchs*schen oder *Riemann*schen Relation" bei den linearen Differentialgleichungen.

Über die *Zeilenteiler* eines Systems im Endlichen können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 13: *Jeder Klasse von Basissystemen* $\left(\eta; \frac{\overset{a}{\eta}}{t^\alpha}\right)$ *oder jedem Modul* $\mathfrak{M} = \left[\eta; \frac{\overset{a}{\eta}}{t^\alpha}\right]$ *entspricht ein endlicher Divisor* $\mathfrak{D}(\mathfrak{M})$

$$\mathfrak{M} \to \mathfrak{D} = \begin{cases} \mathfrak{a}_1^{\delta_1} \dots \mathfrak{b}_1^{\beta_1} \dots \\ \mathfrak{a}_2^{\delta_2} \dots \mathfrak{b}_2^{\beta_2} \dots \\ \vdots \qquad \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\delta_n} \dots \mathfrak{b}_n^{\beta_n} \dots \end{cases}$$

von der Eigenschaft, daß $\mathfrak{D}$ *größter gemeinschaftlicher Teiler der Funktionen des Moduls ist und umgekehrt* $\mathfrak{M}$ *aus Vielfachen*) im Endlichen von* $\mathfrak{D}$ *besteht.*

Es kann sein, daß zu verschiedenen $\mathfrak{M}$ dasselbe $\mathfrak{D}$ gehört.

§ 7. Herstellung einer Divisorenbasis.

Wir zeigen nun umgekehrt: wenn

$$\mathfrak{D} = \begin{cases} \mathfrak{a}_1^{\lambda_1} \dots \mathfrak{b}_1^{\mu_1} \dots \\ \vdots \qquad \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\lambda_n} \dots \mathfrak{b}_n^{\mu_n} \dots \end{cases}$$

ein endlicher, aus einer endlichen Anzahl von Punkten $\mathfrak{a}, \dots \mathfrak{b}, \dots$ bestehender Divisor ist, dann gibt es eine Basis (η) von der Art, daß $\left[\eta; \frac{\overset{a}{\eta}}{t^\alpha}\right]$ alle und nur die Vielfachen von $\mathfrak{D}$ (im Endlichen) umfaßt: „*Basis*“ oder nach *K. Hensel***) „*Fundamentalsystem*“ für den Divisor $\mathfrak{D}$. Ist $(\tilde{\eta})$ eine zweite Basis von derselben Eigenschaft, dann ist notwendig $(\tilde{\eta}) \backsim (\eta)$ und umgekehrt.

Wir gehen von einer beliebigen Basis (ζ) aus, welche aus Vielfachen von $\mathfrak{D}$ (im Endlichen) besteht***) und behandeln nach *K. Hensel* die Stellen $\mathfrak{a} \dots \mathfrak{b} \dots$ der Reihe nach. 1. stellen wir bei $\mathfrak{a}$ aus (ζ) ein äquivalentes, α-dreieckiges spaltennormales System (ξ) her mit dem Schema

---

*) aber i. allg. nicht aus *den* Vielfachen.

**) *Hensel-Landsberg* a. a. O., 14. Vorlesung.

***) daß es solche gibt, ist evident; s. ebenda S. 206.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ jedes } r \geqq \text{jedes } \lambda$$
$$r_1 \quad r_2 \quad \dots \quad r_n$$

wo unten die Exponenten der Spaltenteiler angegeben sind. Dann gehen wir von $(\tilde{\zeta})$ durch eine Reihe von n Schritten*) (von der letzten Spalte und Zeile beginnend) zu einem System $(\tilde{\tilde{\zeta}})$ über, mit folgendem Schema der Anfangskoeffizienten — „Diagonalsystem" —

$$\text{(15.)} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \varnothing & \dots & \varnothing \\ \varnothing & 1 & \dots & \varnothing \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varnothing & \varnothing & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$
$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n$$

$\varnothing$ soll bedeuten, daß nicht nur die Anfangskoeffizienten Null sind, sondern auch alle folgenden Glieder beliebig weit. Es ist dabei $\tilde{\tilde{Z}} = \tilde{Z}.P$, $P = (\varrho_{ik})$ $\varrho_{ik} = 0$ oder von der Form Const. $(z-a)^{\tau}$, τ ganze Zahl und $|P| = \text{Const.}\ (z-a)^{\sum_i (\lambda_i - r_i)}$. Wenn eine oder mehrere Differenzen $r_i - \lambda_i > 0$ sind, gehört $(\tilde{\tilde{\zeta}})$ also einer andern Klasse an als (ζ), besteht aus Vielfachen (im Endlichen) von $\mathfrak{Q}$ und hat die Eigenschaft, daß an der Stelle a:

(16.) Zeilenteiler = Spaltenteiler = Exponenten von $\mathfrak{Q}$ = Elementarteiler bis auf die Reihenfolge.

2. Dasselbe führen wir der Reihe nach für jede Stelle von $\mathfrak{Q}$ durch. Ergebnis: ein System (ϑ), bestehend aus Vielfachen von $\mathfrak{Q}$ mit der Gestalt (15.) und der Eigenschaft (16.) an jeder Stelle von $\mathfrak{Q}$.

3. Betrachten wir die Determinante von (ϑ); sie hat die Gestalt

$$|\vartheta_i^{(k)}| = \text{Const.}\ (z-a)^{\Sigma\alpha+\Sigma\lambda} \dots (z-b)^{\Sigma\mu} \dots (z-c)^{\gamma} \dots,$$

wo $\mathfrak{c}$ als Repräsentant der (nicht in $\mathfrak{Q}$ vorkommenden) endlichen Stellen mit von Null verschiedener Ordnungszahl angeführt ist. Durch denselben Prozeß wie bei 1. gewinnen wir für $\mathfrak{c}$ ein System von der Gestalt

$$\text{(17.)} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \varnothing & \dots & \varnothing \\ \varnothing & 1 & \dots & \varnothing \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varnothing & \varnothing & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
$$0 \quad 0 \quad \dots \quad 0$$

*) s. ebenda, S. 209.

und erlangen, für alle $\mathfrak{c}$ der Reihe nach so verfahrend, als Schlußergebnis eine Basis (η) von folgenden Eigenschaften:

1. $\left[\eta, \frac{^{a}\eta}{t^{a}}\right]$ ist mit der Gesamtheit aller Vielfachen von $\mathfrak{Q}$ (im Endlichen) identisch.

Denn wäre auch nur ein Vielfaches φ bezw. $\frac{^{a}\varphi}{t^{a}}$ von $\mathfrak{Q}$ mit nicht *ganzen* rationalen Funktionen u_i durch die Basis darstellbar, so kommt man bei Betrachtung einer Stelle, wo mindestens ein u_i nicht endlich ist, auf einen Widerspruch*).

(18.) 2. $|\eta_i^{(k)}| = \text{Const.}\,(z-a)^{\Sigma\alpha+\Sigma\lambda}\ldots(z-b)^{\Sigma\mu}\ldots$

da der Übergang von (ϑ) zu (η) durch eine Substitution P erfolgt mit der Determinante $|P| = \text{Const.}\,(z-c)^{-\gamma}\ldots$.

3. An jeder endlichen Stelle sind

Zeilenteiler = Spaltenteiler = Elementarteiler bis auf die Reihenfolge.

Für die Stellen $\mathfrak{a}\ldots\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{c}\ldots$ steht das bereits fest, ebenso für jede andere endliche Stelle, da hier notwendig alle Teilerexponenten gleich Null sind wegen 2.

4. $\mathfrak{Q}$ ist *größter* gemeinschaftlicher Teiler der Funktionen des Moduls $\left[\eta, \frac{^{a}\eta}{t^{a}}\right]$.

Für die Stellen $\mathfrak{a}\ldots\mathfrak{b}\ldots$ ist das evident. Angenommen, es gäbe auch nur eine einzige davon verschiedene endliche Stelle $\mathfrak{c}$, wo alle Funktionen des Moduls durch $\{\mathfrak{c}_1^0, \ldots \mathfrak{c}_h^1, \ldots \mathfrak{c}_n^0\}$ teilbar wären. Dann wäre der h-te Zeilenteiler an der Stelle $\mathfrak{c}$ $\delta_h \geqq 1$ und $\Sigma\delta_i > 0$, was 2. widerspricht.

§ 8. Ausgezeichnete Moduln.

Es gibt also Klassen (K) von Basissystemen mit der Eigenschaft, daß an jeder endlichen Stelle die Zeilenteiler bis auf die Reihenfolge mit den Elementarteilern übereinstimmen; eine solche Klasse wollen wir „*ausgezeichnet*“ nennen, den zugehörigen Modul $\mathfrak{M} = \left[\eta, \frac{^{a}\eta}{t^{a}}\right]$ einen „*ausgezeichneten Modul*“. Dann gilt das

*) s. ebenda S. 211 und den Beweis im Text § 8.

***Theorem I:** Ausgezeichnete Moduln und endliche Divisoren entsprechen einander umkehrbar eindeutig in der Weise* $|\mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{Q}|$, *daß 1.* $\mathfrak{Q}$ *größter gemeinschaftlicher Divisor der Funktionen von* $\mathfrak{M}$ *ist und 2.* $\mathfrak{M}$ *aus der Gesamtheit aller Vielfachen von* $\mathfrak{Q}$ *besteht; u. zw. kann durch eine endliche Anzahl von Schritten zum Modul der Divisor und umgekehrt zum Divisor der Modul hergestellt werden.*

Das letztere wurde soeben gezeigt; es ist auch klar, daß verschiedenen $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ verschiedene ausgezeichnete $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ entsprechen; denn aus $\mathfrak{Q}_1 \to \mathfrak{M}$, $\mathfrak{Q}_2 \to \mathfrak{M}$ folgte, da $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ größte gemeinschaftliche Divisoren von $\mathfrak{M}$ sind, $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_2$. Nun sei umgekehrt $\mathfrak{M} = \left[\eta, \frac{\overset{a}{\eta}}{t^a}\right]$ ein ausgezeichneter Modul; wir bekommen den zugehörigen Divisor $\mathfrak{Q}$, indem wir die Zeilenteiler an folgenden Stellen notieren: 1.) bei den a_σ; 2.) an den endlich vielen Stellen, wo mindestens ein $\eta_i^{(k)}$ eine negative Ordnungszahl hat; 3.) an den sonstigen Stellen, wo die Determinante $|\eta_i^{(k)}|$ eine von Null verschiedene (positive) Ordnungszahl hat. $\mathfrak{Q}$ ist wirklich größter gemeinschaftlicher Teiler von $\mathfrak{M}$; denn an allen von den genannten verschiedenen Stellen sind sämtliche Zeilenteiler δ_i gleich Null; wäre nämlich auch nur ein $\delta_i > 0$, so wäre $\Sigma \delta_i > 0$, während andererseits stets $\Sigma \delta_i \leqq d = 0$ ist. Umgekehrt enthält $\mathfrak{M}$ auch *alle* Vielfachen von $\mathfrak{Q}$. Denn wäre ein Vielfaches ϑ von $\mathfrak{Q}$ mit nicht *ganzen* rationalen Funktionen durch (η) darstellbar

$$\vartheta = u_1 \eta^{(1)} + \cdots + u_n \eta^{(n)},$$

so müßte es mindestens eine endliche Stelle $z = q$ geben, wo die u eine Entwicklung haben

$$u_i = \frac{c_i}{z-q} + \bar{u}_i, \qquad \bar{u}_i \text{ regulär}$$

und nicht alle c_i gleich Null sind*). Schreibt man aber die Entwicklung von $\eta^{(k)}$ und ϑ nach Zeilen (14.) hin, so müssen die Gleichungen bestehen

$$\sum_{k=1}^{n} d_{ik} c_k = 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots n,$$

und diese haben keine andere als die Nullösung c_k, da $|d_{ik}| \neq 0$ ist. Wegen

$$\Sigma \delta_i = \Sigma e_i = d$$

---

*) Für einen Pol höherer Ordnung gilt die Sache um so mehr.

ist die *ausgezeichnete* Basis (η) an jeder endlichen Stelle, speziell $z = q$, nämlich zeilennormal.

Schließlich leuchtet auch ein, daß verschiedenen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ auch verschiedene $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ entsprechen; denn hätte man $\mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{M}_2 \to \mathfrak{Q}$, so folgt, da $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ die Gesamtheit der Vielfachen von $\mathfrak{Q}$ darstellen, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$.

Was die Ideale für einen algebraischen Zahlkörper, leisten die ausgezeichneten Basisklassen (Moduln) für eine *Riemann*sche Funktionenklasse. ***Die Komposition und Zerlegung der endlichen Divisoren, insbesondere die eindeutige Zerlegbarkeit in „Primdivisoren", überträgt sich unmittelbar auf die zugeordneten Moduln.*** Als Primdivisor wird ein nur einen Punkt $\mathfrak{p}$ enthaltender Divisor $\mathfrak{Q} = \{\mathfrak{p}_1^{\lambda_1}, \mathfrak{p}_2^{\lambda_2}, \ldots \mathfrak{p}_n^{\lambda_n}\}$ bezw. — noch weiter zerlegt — ein Divisor der Form $\{\mathfrak{p}_1^0, \mathfrak{p}_2^0, \ldots \mathfrak{p}_h^1, \ldots \mathfrak{p}_n^0\}$ gelten. Auch eine *Klasseneinteilung* der letzteren ist nach den verschiedensten gruppentheoretischen Gesichtspunkten möglich, z. B. wenn alle Divisoren $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{R}$ — $\mathfrak{R}$ = rationaler endlicher Divisor $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}, \ldots \mathfrak{R})$ — in eine Klasse vereinigt werden u. a. m.

§ 9. Folgerungen.

Aus der Gestalt (15.) des Koeffizientensystems erkennt man wie im algebraischen Fall*) und wie bei R. F. P. § 9 den

Satz 14: *Ist*

$$(19.) \qquad \mathfrak{Q} = \begin{cases} \mathfrak{a}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{b}_1^{\varkappa_1} \ldots \\ \mathfrak{a}_2^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{b}_2^{\varkappa_2} \ldots \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\lambda_n} \ldots \mathfrak{b}_n^{\varkappa_n} \ldots \end{cases}$$

ein beliebiger Divisor, so gibt es stets Funktionen der Klasse, welche an den Stellen $\mathfrak{a}, \ldots \mathfrak{b}, \ldots$ *genaue Vielfache von* $\mathfrak{Q}$ *sind; insbesondere kommen also die reduzierten Exponenten* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ *wirklich vor.*

Wählen wir speziell $\mathfrak{Q} = 1$, so folgt

Satz 15: *Es gibt eine „Minimalbasis"* $(\xi) = (\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n)})$ *von* (K)*; die Determinante von* (ξ)*, die* ***„Klassendiskriminante"*** *ist nach* (18.) *gleich*

$$(20.) \qquad D(1) = \Pi (z - a)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \ldots ,$$

wo das Produkt über alle Stellen a_σ zu erstrecken ist.

---

*) s. *Hensel-Landsberg*, S. 126.

Hingegen ist für einen beliebigen endlichen Divisor $\mathfrak{Q}$ der Form (19.) von einer multiplikativen Konstanten abgesehen nach (18.)

$$(21.) \qquad D(\mathfrak{Q}) = D(1).\, \Pi(z-a)^{\Sigma i}. \ldots (z-b)^{\Sigma \varkappa}. \ldots$$

d. h. Satz 16: *Die Diskriminante eines beliebigen ausgezeichneten Moduls zerfällt in das Produkt der Klassendiskriminante und der Norm des zugehörigen Divisors.*

§ 10. Die Multipla von $\mathfrak{Q}$.

Der Begriff des Vielfachen erstreckte sich bis jetzt immer nur auf die endlichen Stellen, während das Verhalten der Funktion im Unendlichen gleichgültig war. Nun sollen aus dem, dem endlichen Divisor $\mathfrak{Q}$ entsprechenden Modul $\mathfrak{M} = \left[\eta, \frac{\overset{a}{\eta}}{t^a}\right]$ diejenigen Funktionen ausgesondert werden, die auch im Unendlichen Vielfache von $\mathfrak{Q}$ sind, d. h. daselbst nicht negative Ordnungszahl haben; wir verwenden dafür — um eine Unterscheidung zu haben — das Wort „Multipla“*).

Es sei zunächst $(\zeta) \backsim (\eta)$ und spaltennormal für $\mathfrak{p}_\infty$, $r_1 \geqq r_2 \geqq \ldots \geqq r_n$ die Spaltenteiler von $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)}$; ist r_p die letzte nicht negative Zahl, dann bilden — wie man genau wie im algebraischen Fall zeigt*) — die

$$N = (r_1 + 1) + \cdots (r_p + 1)$$

Funktionen

$$(22.) \qquad x_\nu = \begin{cases} \zeta^{(1)}, z\zeta^{(1)}, \ldots z^{r_1}\zeta^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \zeta^{(p)}, z\zeta^{(p)}, \ldots z^{r_p}\zeta^{(p)} \end{cases} \qquad \nu = 1, 2, \ldots N$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$ in dem Sinne, daß jedes Multiplum x von $\mathfrak{Q}$ in eindeutiger Weise in der Form

$$x = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu x_\nu \quad c_\nu \text{ Konstante}$$

darstellbar ist**).

Da (ζ) für $\mathfrak{p}_\infty$ spaltennormal ist und der n-te Determinantenteiler d nach (21.) daselbst gleich ist $d = -(q + \Sigma\Sigma\alpha)$, so folgt die wichtige

---

*) Vergl. hierzu *Hensel-Landsberg*, 15. Vorlesung § 1.

**) Diese Konstruktion ist von der Annahme, daß $\mathfrak{Q}$ ein endlicher Divisor ist, wie überhaupt von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen gänzlich unabhängig. Wäre das erstere nicht der Fall, so brauchte man von vornherein letztere nur anders zu wählen.

Gleichung

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n + q = -\Sigma\Sigma\alpha = -(p+n-1).$$

§ 11. Die komplementäre Klasse.

Wir betrachten jetzt die zu (K) komplementäre Klasse $(\breve{K})$ mit den zu A_σ komplementären (kontragredienten) Substitutionen $\breve{A}_\sigma (\sigma = 1, 2, \ldots s)$. Es ist $\overbrace{(\breve{K})} = (K)$. Ist H eine Basis von (K), so ist $\breve{H}$ eine Basis von $(\breve{K})$. Ist ferner $H \backsim Z$, so folgt $\breve{H} \backsim \breve{Z}$; also folgt

Satz 17: *Die Basisklassen (Moduln) zweier zueinander komplementärer Klassen entsprechen einander wechselseitig:* $(H) \rightleftarrows (\breve{H})$.

Diese selbstverständlichen Sätze müssen durch Betrachtung der Stellen a_σ ergänzt und vertieft werden. Für eine solche a hatten wir das System $\overset{a}{H} = L^{-1}.H$ gewählt.

$$|\overset{a}{H}|^* = B\overset{a}{H}, \quad \{\overset{\breve{a}}{H}\}^* = \overbrace{\{\overset{a}{H}\}^*} = \breve{B}\overset{\breve{a}}{H},$$

wobei mit

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \breve{B} = \begin{pmatrix} \breve{B}_1 & & \\ & \breve{B}_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

ist u. zw. für (8.)

$$B_1 = e_1 \qquad \breve{B}_1 = \frac{1}{e_1}$$

bezw.

$$B_1 = \begin{vmatrix} e_1 & & & \\ 1 & e_1 & & \\ & 1 & e_1 & \\ & & \cdots & \\ & & & \cdots \end{vmatrix}, \quad \breve{B}_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{e_1} & -\frac{1}{e_1^2} & +\frac{1}{e_1^3} & \cdots \\ & \frac{1}{e_1} & -\frac{1}{e_1^2} & \cdots \\ & & \frac{1}{e_1} & \cdots \\ & & & \cdots \end{vmatrix}$$

$\varkappa$ Zeilen und Spalten.

Nur in dem Falle also, daß B aus lauter *eingliedrigen* Ketten besteht, hat mit B auch $\breve{B}$ die Normalform; sonst muß $\breve{B}$ nach § 1 durch eine Substitution

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & T_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \text{ mit } |T| \neq 0$$

in die Normalform

$$\dot{B} = T^{-1}\breve{B}T$$

übergeführt werden. Das kann speziell so geschehen: da in der Bezeichnungsweise von § 1 für die $\varkappa$-zeilige Substitution $\breve{B}_1$

$$\varphi(u) = \psi(u) = \left(u - \frac{1}{e_1}\right)^{\varkappa}, \qquad A_1 = \frac{1}{e_1}E - \breve{B}_1$$

ist, kann als Lösung von $A_1^{\varkappa}x = 0$ die Kette

$$T_1 = (p_1, p_2, \dots p_{\varkappa})$$

gewählt werden, wobei

$$(24.)\quad p_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},\ p_{\pi+1} = A_1^{\pi}p_1 = \begin{vmatrix} (-1)^{\varkappa-1}\binom{\varkappa-2}{\pi-1}\varepsilon_1^{\varkappa+\pi-1} \\ (-1)^{\varkappa-2}\binom{\varkappa-3}{\pi-1}\varepsilon_1^{\varkappa+\pi-2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ (-1)^{\pi}\binom{\pi-1}{\pi-1}\varepsilon_1^{2\pi} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix},\ \varepsilon_1 = \frac{1}{e_1}$$

$$\pi = 1, 2, \dots \varkappa - 1$$

wie durch vollständige Induktion leicht zu zeigen ist*).

Festsetzung: Wir betrachten also neben $(H, \overset{a}{H})$ *das System* $(\dot{H}, \overset{\dot{a}}{H})$, *wobei*

$$\text{im Fall I:}\quad \dot{H} = \breve{H},\ \overset{\dot{a}}{H} = \overset{\breve{a}}{H}$$

$$\text{,, ,, II:}\quad \dot{H} = \breve{H},\ \overset{\dot{a}}{H} = T^{-1}\overset{\breve{a}}{H}$$

und T der obigen Bedingung entsprechend beliebig, aber fest gewählt ist.

---

*) Mittels derselben zeigt man ferner, daß

$$T_1^{-1} = (q_{\varkappa}, q_{\varkappa-1}, \dots q_1)$$

und

$$q_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix},\ q_{\pi+1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (-1)^{\pi}\binom{\pi-1}{\pi-1}e_1^{2\pi} \\ (-1)^{\pi+1}\binom{\pi}{\pi-1}e_1^{2\pi+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ (-1)^{\varkappa-1}\binom{\varkappa-2}{\pi-1}e_1^{\varkappa+\pi-1} \end{vmatrix}$$

ist.

Man hat

$$\dot{H}^* = \breve{A}\,\dot{H},\quad \overset{\dot{a}}{H}{}^* = \dot{B}\overset{\dot{a}}{H}\begin{cases}\text{I. } \dot{B} = \breve{B}\\ \text{II. } \dot{B} = T^{-1}\breve{B}\,T\end{cases}$$

und

$$\overset{a}{H} = L^{-1}H,\quad \overset{\dot{a}}{H} = \dot{L}^{-1}\dot{H}\begin{cases}\text{I. } \dot{L} = \breve{L},\\ \text{II. } \dot{L} = \breve{L}\,T.\end{cases}$$

Gehen wir umgekehrt von dem der Klasse $(\breve{K})$ angehörenden System $(\dot{H}, \overset{\dot{a}}{H})$ aus und ist U eine Substitution derart, daß (im Fall II)

$$U^{-1}\breve{B}\,U = B,$$

so wird

$$[\dot{H}] = H,\ \left[\overset{\dot{a}}{H}\right] = \begin{cases}\text{I. } \overset{a}{H},\\ \text{II. } (\breve{T}\,U)^{-1}\overset{a}{H}.\end{cases}$$

Nur wenn also $U = \breve{T}^{-1} = \bar{T}$ gewählt wird — was möglich ist — kommen wir auch im Fall II zu $\overset{a}{H}$ zurück.

§ 12. Die Teiler des Systems $(\dot{H}, \overset{\dot{a}}{H})$.

Wir untersuchen jetzt das Verhalten von $(\dot{H}, \overset{\dot{a}}{H})$ an einer Stelle a. Die Funktionen $\overset{a}{\eta}$ bezw. $\overset{\dot{a}}{\zeta}$ — wo die ζ aus den η analog wie die z aus den y (9.) entstehen — verhalten sich jetzt rein multiplikativ mit den Faktoren $\frac{1}{e_1}, \ldots$ und gestatten daher eine Entwicklung

$$\overset{\dot{a}}{\eta}_i \text{ bezw. } \overset{\dot{a}}{\zeta}_i = t^{-a_i}\dot{P}_i(z-a) \qquad (i=1,2,\ldots n)\ .$$

Indem wir unsere Aufmerksamkeit zuerst auf die *Spalten* des Systems richten, sei wie in § 5 (13.) — abgesehen von den logarithmischen Gliedern —

$$\frac{\overset{a}{\eta}{}_i^{(k)}}{t^{a_i}} = c_{ik}\,t^{r_k} + \cdots, \qquad \frac{\overset{\dot{a}}{\eta}{}_i^{(k)}}{t^{-a_i}} = \dot{c}_{ik}\,t^{\dot{r}_k} + \cdots$$

und mindestens ein c_{ik}, $\dot{c}_{ik}$ für jede Spalte $\neq 0$.

Es gilt dann der

Satz 18: *Ist das System* $\overset{a}{\boldsymbol{H}}/t^{\alpha}$ *an der Stelle a spaltennormal und sind* r_k *die Spaltenteiler, dann ist das System* $\dot{\overset{a}{\boldsymbol{H}}}/t^{-\alpha}$ *ebenfalls spaltennormal und hat die Spaltenteiler* $-r_k (k = 1, 2, \dots n)$.

Wie man durch Ansetzen sieht, sind die $\dot{c}_{ik}$ abgesehen von einer von Null verschiedenen Konstanten gleich C_{ik} bezw. $T^{-1}.C_{ik}$, wo C_{ik} das algebraische Komplement von c_{ik} bedeutet, und daher wegen $|T| \neq 0$, $|c_{ik}| \neq 0$ die $\dot{c}_{ik}$ je für ein festes k nicht sämtlich Null.

Daraus folgt in Verbindung mit Satz 5 und 6 — wie auch direkt gezeigt werden kann —

Satz 19: *Sind die Elementarteilerexponenten des Systems* $\overset{a}{\boldsymbol{H}}/t^{\alpha}$ *an der Stelle a gleich* $e_1, e_2, \dots e_n$, *so sind diejenigen von* $\dot{\overset{a}{\boldsymbol{H}}}/t^{-\alpha}$ *gleich* $-e_n, -e_{n-1}, \dots, -e_1$.

Schließlich ziehen wir die Anordnung des Systems nach *Zeilen* in Betracht und nehmen dabei an, daß $\overset{a}{\boldsymbol{H}}/t^{\alpha}$ bei a zeilennormal sei und je für die Zeilen einer Kette die Zeilenteiler gleich seien. Man hat also (14.)

$$\frac{\overset{a(k)}{\eta_i}}{t^{\alpha_i}} = d_{ik}\, t^{\delta_i} + \cdots, \qquad |d_{ik}| \neq 0, \; \Sigma \delta_i = d$$

und z. B. wenn die ersten $\varkappa$ Zweige eine Kette bilden

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\varkappa, \quad \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_\varkappa.$$

Von allen ev. logarithmischen Gliedern abgesehen wird

$$\frac{\breve{a}_{(k)}}{t^{-\alpha_i}} = \frac{D_{ik}}{|d_{ik}|}.\, t^{-\delta_i} + \cdots = \breve{d}_{ik}\, t^{-\delta_i} + \cdots; \; D_{ik} = \text{Alg. Kompl. von } d_{ik}$$

und weiter für die $\varkappa$ ersten Zweige, wenn der Kürze halber $T_1^{-1} = (\tau_{\lambda\mu})$ $\lambda, \mu = 1, 2, \dots \varkappa$ gesetzt wird,

$$\frac{\dot{a}_{(1)}}{t^{-\alpha_1}} = (\tau_{11}\, \breve{d}_{11} + \tau_{12}\, \breve{d}_{21} + \cdots \tau_{1\varkappa}\, \breve{d}_{\varkappa 1})\, t^{-\delta_1} + \cdots = \dot{d}_{11}\, t^{-\delta_1} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\dot{a}_{(n)}}{t^{-\alpha_1}} = (\tau_{11}\, \breve{d}_{1n} + \tau_{12}\, \breve{d}_{2n} + \cdots \tau_{1\varkappa}\, \breve{d}_{\varkappa n})\, t^{-\delta_1} + \cdots = \dot{d}_{1n}\, t^{-\delta_1} + \cdots$$

u. s. f.

Hierbei ist mindestens ein $\dot{d}_{1k} \neq 0$, da die n linearen homogenen Gleichungen $\dot{d}_{11} = 0, \ldots d_{1n} = 0$ wegen $|\breve{d}_{ik}| \neq 0$ nur die Nullösung $(\tau_{11} = 0, \ldots \tau_{1k} = 0, 0, \ldots 0)$ haben könnten, was aber $|T| \neq 0$ widerspricht. Es gilt also der

Satz 20: *Ist das System* $\frac{\overset{a}{H}}{t^a}$ *an der Stelle a zeilennormal und hat es die je für eine Kette gleichen Zeilenteiler* δ_i, *dann ist das System* $\frac{\overset{\dot{a}}{H}}{t^{-a}}$ *ebenfalls zeilennormal und hat die für eine Kette jeweils gleichen Zeilenteiler* $-\delta_i$*).

Eine Basisklasse $\left(H, \frac{\overset{a}{H}}{t^a}\right)$ bezw. $\left(\dot{H}, \frac{\overset{\dot{a}}{H}}{t^{-a}}\right)$ oder den zugehörigen Modul $\mathfrak{M}$ bezw. $\dot{\mathfrak{M}}$ wollen wir einen *Eigenmodul* von (K) bezw. $(\breve{K})$ nennen, wenn für je eine Kette bei a die Zeilenteiler gleich sind, ebenso einen Divisor mit Exponentengleichheit für die Punkte einer Kette einen „*Eigendivisor*" des Paares $(\breve{K}), (K)$. Es gilt dann das den Satz 17. vervollständigende

Theorem II: Ist $\mathfrak{M}$ *ein ausgezeichneter Eigenmodul von* (K), *dann ist* $\dot{\mathfrak{M}}$ *ein ausgezeichneter Eigenmodul von* $(\breve{K})$ *und umgekehrt; entspricht ferner* $\mathfrak{M}$ *der Eigendivisor* $\mathfrak{Q}$, *so entspricht* $\dot{\mathfrak{M}}$ *der Eigendivisor* $\mathfrak{Q}^{-1}$ *und umgekehrt.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus den beiden vorhergehenden Sätzen, wenn man bedenkt, daß $\mathfrak{M}$ an jeder endlichen Stelle zeilennormal sein muß. Führen wir jetzt die reduzierten Exponenten der Klasse $(\breve{K})$ ein, indem wir setzen

$$\hat{\alpha}_i = -\alpha_i + \varepsilon_i, \quad 0 \leqq \hat{\alpha}_i' < 1 \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{25.}$$

wo also ε_i gleich Null oder Eins ist, je nachdem der reelle Teil von α_i gleich oder ungleich Null ist. Für die Glieder einer Kette sind die α_i und daher die ε_i und $\hat{\alpha}_i$ gleich; der Divisor

---

*) Die Voraussetzung über die Gleichheit der Zeilenteiler für je eine Kette ist durchaus *notwendig*, da sich sonst i. allg. gar keine bestimmte Aussage machen läßt; höchstens in gewissen Fällen, z. B. bei spezieller Wahl von T (24.) und gleichzeitiger Annahme $\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_\varkappa$; dann werden die Teiler von $\frac{\overset{a}{H}}{t^{-a}}$ gleich $-\delta_\varkappa > -\delta_{\varkappa-1} > \cdots > -\delta_1$.

(26.) $$\mathfrak{Z} = \Pi \begin{Bmatrix} a_1^{\varepsilon_1} \\ \vdots \\ a_n^{\varepsilon_n} \end{Bmatrix},$$

worin das Produkt über alle Punkte a_σ zu erstrecken ist, ist also ein „Eigendivisor"; wir nennen ihn den **Verzweigungsdivisor der Klasse** (K). Für die komplementäre Klasse $(\breve{K})$ erhalten wir $\breve{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z}$, da auch $\alpha_i = -\breve{\alpha}_i + \varepsilon_i$. $\mathfrak{Z}$ kommt also dem *Klassenpaar* $(K), (\breve{K})$ zu. Jetzt kann das obige Theorem für die beiden ausgezeichneten Eigenmoduln $\mathfrak{M} = \left(H, \frac{\overset{a}{H}}{t^\alpha}\right)$ und $\breve{\mathfrak{M}} = \left(\dot{H}, \frac{\overset{\dot{a}}{H}}{t^{\breve{\alpha}}}\right)$ auch in der Form seinen Ausdruck finden

Theorem IIa:

$$(K): \mathfrak{M} = \left(H, \frac{\overset{a}{H}}{t^\alpha}\right) \rightleftarrows \mathfrak{Q}$$

$$(\breve{K}): \breve{\mathfrak{M}} = \left(\dot{H}, \frac{\overset{\dot{a}}{H}}{t^{\breve{\alpha}}}\right) \rightleftarrows \breve{\mathfrak{Q}} \qquad \mathfrak{Q} \cdot \breve{\mathfrak{Q}} = \frac{1}{\mathfrak{Z}}.$$

§ 13. Die Differentialsysteme.

Zu jedem *Riemann*schen Funktionensystem $y = (y_1, \ldots y_n)$ gehört das System der Integrale $I = \int_{z_0}^{z} y\,dz$ bezw. Differentiale $dI = y\,dz$, welche auch unabhängig, analog wie in § 1, charakterisiert werden können. Alles über die Funktionen „im Großen" Gesagte, Klasseneinteilung, Basis etc., überträgt sich ohne weiteres auf die Differentiale. Die Eigenschaften „im Kleinen" beruhen auf folgender

Definition: Ein Differentialsystem $\left(dI = y\,dz, \frac{\overset{a}{dI}}{t^\alpha} = \frac{\overset{a}{y\,dz}}{t^\alpha}\right)$ *der Klasse* (K) *heißt ein Multiplum des beliebigen Divisors* $\mathfrak{Q}$, *wenn das Funktionensystem* $\left(y, \frac{\overset{a}{y}}{t^\alpha}\right)$ *ein Multiplum von* $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{W}^{-1}$ *ist; hierbei ist der Differentialdivisor*

(27.) $$\mathfrak{W} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}_z^2}, \qquad \mathfrak{N}_z = \begin{Bmatrix} \mathfrak{n}_{z_1} \\ \vdots \\ \mathfrak{n}_{z_n} \end{Bmatrix}$$

und $\mathfrak{n}_{z_i}$ *die Stelle, wo die unabhängige Variable auf dem Blatt* K_i *unendlich wird.*

Diese Definition ist unabhängig von der *Wahl* der unabhängigen Veränderlichen, wie man analog wie im algebraischen Fall zeigt*). Ist $\mathfrak{Q}$ ein Eigendivisor, dann ist auch $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{W}^{-1}$ ein solcher und umgekehrt, da $\mathfrak{W}$ ein solcher ist.

Völlig analog wie in § 10 kann jetzt die *Aufgabe* gelöst werden: ein vollständiges, linear unabhängiges System von Differentialen der Klasse (K) zu finden, welche Multipla eines beliebigen Divisors $\mathfrak{Q}$ sind.

Derselbe kann ohne Einschränkung als „endlicher" Divisor vorausgesetzt werden, da wir sonst nur die unabhängige Variable anders zu wählen brauchten. Wir stellen zunächst nach § 7 ein Fundamentalsystem $\left(\eta, \frac{\overset{a}{\eta}}{t^a}\right)$ von (K) für den Divisor $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Z}^{-1}$ her. Sei $(\zeta) \sim (\eta)$, spaltennormal für die unendlich ferne Stelle und die Funktionen $(\zeta) = (\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ so geordnet, daß $r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_n$. Wenn r_s der erste Spaltenteiler $\geqq 2$ ist, dann bilden die Differentiale

$$\begin{gathered} \zeta^{(1)} dz, z\zeta^{(1)} dz, \ldots z^{r_s-2}\zeta^{(1)} dz \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \zeta^{(n)} dz, z\zeta^{(n)} dz, \ldots z^{r_n-2}\zeta^{(n)} dz \end{gathered}$$

das gewünschte System**). Sind alle $r_k < 2$, dann gibt es keine Multipla von $\mathfrak{Q}$.

Insbesondere erhalten wir für $\mathfrak{Q} = 1$ eine Basis für die „*überall endlichen*" Differentiale der Klasse (K).

Wir merken schließlich noch folgenden *Hilfssatz* an: Ist $\mathfrak{R}$ der einer beliebigen rationalen Funktion $R(z)$ entsprechende Divisor — ausführlich $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}, \mathfrak{R}, \ldots \mathfrak{R})$ — so ist die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen oder Differentiale, welche Multipla von $\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{R}$ sind, gleich.

§ 14. Der verallgemeinerte *Riemann-Roch*sche Satz.

Sei $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Eigendivisor von (K); $\mathfrak{p}_0(z = z_0)$ eine endliche, von den a_σ und den sonst in $\mathfrak{Q}$ vorkommenden Punkten verschiedene Stelle. Wir setzen

$$\mathfrak{Q} \cdot (z - z_0) = \mathfrak{Q}_1 \begin{cases} \mathfrak{p}_{01} \\ \vdots \\ \mathfrak{p}_{0n} \end{cases} = \tilde{\mathfrak{Q}}. \tag{28.}$$

---

*) S. *Hensel-Landsberg*, a. a. O., S. 274.

**) Beweis wie im algebraischen Fall; s. *Hensel-Landsberg*, S. 297.

$\mathfrak{Q}_1$ enthält alsdann die Stelle $\mathfrak{p}_0$ und ist ebenfalls — ebenso wie $\tilde{\mathfrak{Q}}$ — ein Eigendivisor von (K). Unter Zugrundelegung der unabhängigen Variabeln $z' = \frac{1}{z - z_0}$ konstruieren wir den $\mathfrak{Q}_1$ entsprechenden Modul $\left[\Xi, \frac{\overset{a}{\Xi}}{t^a}\right]$; das System $(\Xi) = (\Xi^{(1)}, \dots \Xi^{(n)})$ sei für $\mathfrak{p}_0$ spaltennormal und so angeordnet, daß $r_1 \geqq r_2 \geqq \dots \geqq r_n$. Dann entspricht der der komplementären Klasse $(\breve{K})$ angehörende Modul $\left[\dot{\Xi}, \frac{\overset{\dot{a}}{\Xi}}{\breve{t}^a}\right]$ nach Theorem II a dem Divisor $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{Q}_1^{-1} \cdot \mathfrak{Z}_{z'}^{-1}$, welcher ein Eigendivisor von (K), $(\breve{K})$ ist. Dasselbe gilt von $\mathfrak{P}$, $\tilde{\mathfrak{P}}$, wenn wir analog zu (28.) setzen

$$(28^a.) \qquad \tilde{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}_1 \begin{Bmatrix} \mathfrak{p}_{01} \\ \vdots \\ \mathfrak{p}_{0n} \end{Bmatrix} = \mathfrak{P} \begin{Bmatrix} \mathfrak{p}_{01} & \mathfrak{p}_{\infty 1}^{-1} \\ \vdots & \vdots \\ \mathfrak{p}_{0n} & \mathfrak{p}_{\infty n}^{-1} \end{Bmatrix}.$$

Die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen $\left(\xi, \frac{\overset{a}{\xi}}{t^a}\right)$ von (K), welche Multipla von $\tilde{\mathfrak{Q}}$ sind, heiße U. Sind alle $r_k \leqq 0$, dann ist $U = 0$. Ist dagegen mindestens ein $r_k > 0$ und r_s der letzte Spaltenteiler > 0, dann gewinnen wir aus dem ersteren Modul in den Funktionen

$$(29.) \qquad \begin{array}{l} \xi^{(1)}, \frac{\xi^{(1)}}{z - z_0}, \dots \frac{\xi^{(1)}}{(z - z_0)^{r_1 - 1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi^{(s)}, \frac{\xi^{(s)}}{z - z_0}, \dots \frac{\xi^{(s)}}{(z - z_0)^{r_s - 1}} \end{array}$$

ein vollständiges, linear unabhängiges System von Funktionen $\left(\xi, \frac{\overset{a}{\xi}}{t^a}\right)$ der Klasse (K), welche Multipla von $\tilde{\mathfrak{Q}}$ sind, und es ist

$$\begin{aligned} U &= r_1 + r_2 + \dots + r_s \text{ oder} \\ &= r_1 + r_2 + \dots + r_s + r_{s+1} + \dots + r_t, \end{aligned}$$

wenn r_t der letzte Spaltenteiler $\geqq 0$ ist. Sei nun $\breve{V}$ die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen

$$(30.) \qquad \left(\dot{\zeta}, \frac{\overset{\dot{a}}{\zeta}}{\breve{t}^a}\right) - \overset{\dot{a}}{\dot{\zeta}} = \dot{L}^{-1}\,\dot{\zeta} - \text{ der Klasse } (\breve{K}),$$

welche Multipla von $\tilde{\mathfrak{P}}$ sind. Der zweite obige Modul liefert uns in analoger Weise ein vollständiges, linear unabhängiges System von solchen,

und wir finden für $\breve{V}$ folgenden Wert, da die Spaltenteiler $\dot{r}_k$ von $(\dot{\Xi})$ den r_k entgegengesetzt gleich sind:

1. alle $r_k \leqq 0$, alle $\dot{r}_k \geqq 0$ $\qquad \breve{V} = \dot{r}_n + \cdots + \dot{r}_1$
2. $r_1 \geqq \ldots \geqq r_t \geqq 0 > r_{t+1} \geqq \ldots \geqq r_n$ $\qquad \breve{V} = \dot{r}_n + \cdots + \dot{r}_{t+1}$
   $\dot{r}_n \geqq \ldots \geqq \dot{r}_{t+1} > 0 \geqq \dot{r}_t \geqq \ldots \geqq \dot{r}_1$

Also ist stets

$$U - \breve{V} = r_1 + r_2 + \cdots + r_n.$$

Nun ist aber, wenn q die Ordnung von $\mathfrak{Q}$, $q_1 = q - n$ diejenige von $\mathfrak{Q}_1$ bezeichnet, nach (23.)

$$\Sigma r = -q_1 - \Sigma\Sigma\alpha = -q + n - \Sigma\Sigma\alpha$$

und bei Einführung von p also

$$U - \breve{V} = -q - p + 1. \tag{31.}$$

Aus dieser fundamentalen Gleichung ziehen wir verschiedene Folgerungen. Bemerken wir zunächst, daß die aus (30.) gebildeten Differentiale $\left(\dot{\zeta}\,dz', \frac{\overset{a}{\zeta}\,dz'}{t^{\breve{\alpha}}}\right)$ der Klasse $(\breve{K})$ Multipla von $\tilde{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{W}_{z'} = \tilde{\mathfrak{Q}}^*$ sind und wegen (28.), (28ª.)

$$\tilde{\mathfrak{Q}} \cdot \tilde{\mathfrak{Q}}^* = 1$$

ist *).

Setzen wir schließlich $\tilde{\mathfrak{Q}}^* = \mathfrak{Q}^* \cdot \frac{1}{z - z_0}$, so daß auch $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Q}^* = 1$ wird, und erinnern uns an den Hilfssatz am Ende von § 13, so können wir das **Theorem III.** aussprechen:

*Seien (K), $(\breve{K})$ zwei zueinander komplementäre Riemannsche Funktionenklassen vom Geschlecht p und $\breve{p}$, $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}^{-1}$ zwei zueinander reziproke Eigendivisoren von den Ordnungen $q, -q$; dann besteht zwischen den Funktionen $\left(\xi, \frac{\overset{a}{\xi}}{t^{\alpha}}\right)$ von (K) und den Differentialen $\left(\dot{\zeta}\,dz, \frac{\overset{\dot{a}}{\zeta}\,dz}{t^{\breve{\alpha}}}\right)$ von $(\breve{K})$, wobei $\overset{a}{\xi} = L^{-1}\xi, \overset{\dot{a}}{\zeta} = \dot{L}^{-1}\zeta$, folgender Zusammenhang**):*

---

*) Vergl. R. F. P. § 14.

**) In den Differentialen können wir hierbei wieder z statt z' einführen.

Die Anzahl U der linear unabhängigen Funktionen, welche Multipla von $\mathfrak{Q}$ sind, vermindert um die Anzahl $\breve{V}$ der linear unabhängigen Differentiale, welche Multipla von $\mathfrak{Q}^{-1}$ sind, ist gleich

(31ª.) $$U - \breve{V} = -p - q + 1.$$

Zusatz: Das Theorem besteht auch allgemein für zwei Eigendivisoren mit dem Produkt $\mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{Q}' =$ rationaler Divisor).*

§ 14. Reziprozitätstheoreme.

Der Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}$ von der Ordnung $\mathfrak{z}$ und der Differentialdivisor $\mathfrak{W}$ von der Ordnung $\mathfrak{w} = \mathfrak{z} - 2n$ waren Eigendivisoren von (K), $(\breve{K})$. Für die Geschlechter p und $\breve{p}$ von (K) und $(\breve{K})$ gilt aber

$$p = \Sigma\Sigma\alpha_i - n + 1, \qquad \breve{p} = \Sigma\Sigma\breve{\alpha}_i - n + 1,$$

und da nach (25.), (26.)

$$\Sigma\Sigma\breve{\alpha} = -\Sigma\Sigma\alpha + \mathfrak{z},$$

so wird

(32.) $$p + \breve{p} = \mathfrak{z} - 2(n-1) = \mathfrak{w} + 2.$$

Theorem IV. *Die Geschlechter zweier zueinander komplementären Klassen ergänzen sich zu $\mathfrak{w}+2$, wenn $\mathfrak{w}$ die Ordnung des Differentialdivisors des Klassenpaars bedeutet.*

Korollar: *Haben insbesondere zwei zueinander komplementäre Klassen dasselbe Geschlecht p, so wird*

$$2p - 2 = \mathfrak{w}.$$

Gehen wir auf die ursprüngliche Bedeutung der Gleichung (31.) und der Zahlen $U, \breve{V}$ zurück, wobei $\tilde{\mathfrak{Q}}\cdot\tilde{\mathfrak{P}} = \mathfrak{W}_z^{-1}$ und damit auch $\mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{Q}^* = \mathfrak{W}_z^{-1}$ wird, wenn $\mathfrak{Q}^* = \tilde{\mathfrak{P}}\cdot(z - z_0)$ ist, und bemerken wir, daß $\breve{V}$ auch gleich der Anzahl $\breve{U}^*$ der linear unabhängigen Funktionen $\left(\dot{\zeta}, \frac{\overset{a}{\zeta}}{\breve{t}^{\alpha}}\right)$ von $(\breve{K})$ wird,

---

*) Wählt man speziell $\mathfrak{Q} = \prod_{(e)} \begin{cases} \mathfrak{p}_{e1}^{-1} \\ \vdots \\ \mathfrak{p}_{en}^{-1} \end{cases}$, wo $\mathfrak{p}_e (e = 1, 2, \ldots \varepsilon)$ ε beliebige Punkte sind, so wird $q = -n\varepsilon$ und $U - \breve{V} = -p + n\varepsilon + 1 = n(\varepsilon+1) - \Sigma\Sigma\alpha$; das ist die Formel von *Ritter*, a. a. O., S. 193 unten für $\delta = p = 0$; doch hat *Ritter* überhaupt eine ganz andere Definition des Multiplums und der Exponenten, so daß seine und die hier spezialisierte Formel überhaupt unmittelbar nicht verglichen werden können.

welche Multipla von $\mathfrak{Q}^*$ sind, ferner daß für die Ordnungen q, q^* von $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}^*$ gilt

$$q + q^* = -\mathfrak{w};$$

dann bestätigt man unter Beachtung von (31.), (32.) sofort das Bestehen der Gleichung

$$2U + p + q = 2\breve{U}^* + \breve{p} + q^*$$

oder i. W.

Theorem V. *Sind $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}^*$ zwei beliebige Eigendivisoren der Klassen $(K), (\breve{K})$ mit dem Produkt $\mathfrak{W}^{-1}$ oder $\mathfrak{W}^{-1} \cdot \mathfrak{R}$ und den Ordnungen q, q^*, so besteht zwischen den Funktionen $\left(\xi, \frac{\overset{a}{\xi}}{t^a}\right)$ von (K) und den Funktionen $\left(\dot{\zeta}, \frac{\overset{\dot{a}}{\zeta}}{t^{\breve{a}}}\right)$ von $(\breve{K})$ folgender Zusammenhang: die doppelten Anzahlen der linear unabhängigen Funktionen von (K) bezw. $(\breve{K})$, welche Multipla von $\mathfrak{Q}$ bezw. $\mathfrak{Q}^*$ sind, vermehrt um das Geschlecht von (K) bezw. $(\breve{K})$ und die Ordnung von $\mathfrak{Q}$ bezw. $\mathfrak{Q}^*$ sind einander gleich*).*

Für zwei komplementäre Klassen mit demselben Geschlecht p folgt das

(33ª.) **Korollar (V*):** $U + \frac{q}{2} = \breve{U}^* + \frac{q^*}{2}$.

Gleichung (31.) läßt sich aber auch umformen in eine Aussage über die *Differentiale* von (K) und $(\breve{K})$, wenn man bedenkt, daß U auch gleich der Anzahl der linear unabhängigen Differentiale $\left(\xi dz', \frac{\overset{a}{\xi} dz'}{t^a}\right)$ von (K) ist, welche Multipla von $\tilde{\mathfrak{Q}}\mathfrak{W}_{z'}$ sind. Bedenkt man, daß $\tilde{\mathfrak{Q}}\mathfrak{W}_{z'} \cdot \tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{W}_{z'} = \mathfrak{W}_{z'}$ wird, so besteht — bei veränderter Bezeichnungsweise — folgende Gleichung

(34.) $$2V + p + q = 2^*\breve{V} + \breve{p} + {}^*q$$

oder i. W.

Theorem VI. *Sind $\mathfrak{Q}, {}^*\mathfrak{Q}$ zwei beliebige Eigendivisoren der Klassen $(K), (\breve{K})$ mit dem Produkt $\mathfrak{W}$ oder $\mathfrak{W} \cdot \mathfrak{R}$, so besteht zwischen den Differentialen $\left(\xi dz, \frac{\overset{a}{\xi} dz}{t^a}\right)$ von (K) und den Diffe-*

---

*) Hierin, ebenso wie im folgenden Theorem, kann $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_z$ statt $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}_{z'}$ geschrieben werden, da $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W} \cdot \mathfrak{R}$ ist.

rentialen $\left(\dot{\zeta}dz, \frac{\overset{a}{\zeta}dz}{\breve{t}^a}\right)$ *von* $(\breve{K})$ *folgender Zusammenhang: die doppelten Anzahlen der linear unabhängigen Differentiale von* (K) *bezw.* $(\breve{K})$, *welche Multipla von* $\mathfrak{Q}$ *bezw.* $^*\mathfrak{Q}$ *sind, vermehrt um das Geschlecht von* (K) *bezw.* $(\breve{K})$ *und die Ordnung von* $\mathfrak{Q}$ *bezw.* $^*\mathfrak{Q}$, *sind einander gleich.*

Haben (K) und $(\breve{K})$ dasselbe Geschlecht, so erhält man als

(34ª.) **Korollar (VI*):** $V + \frac{q}{2} = {}^*\breve{V} + \frac{{}^*q}{2}$.

Auf die zahlreichen Spezialisierungen und Folgerungen aus obigem Theorem, bes. hinsichtlich der Aufstellung von Elementar-Funktionen und und -Differentialen, Partialbruchzerlegung usw. kann hier leider der Kürze halber nicht eingegangen werden*).

III. Abschnitt: Algebraischer Fall.

§ 15. Spezialisierung von L und $\mathfrak{Q}$.

Es seien nun sämtliche A_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots s)$ *Vertauschungssubstitutionen.* Dann ist (K) eine Klasse algebraischer Funktionen mit der Gruppe mit den Erzeugenden A_σ und zwar eine irreduzible Klasse, wenn — wie stets im vorhergehenden — (K) als nicht zerfallend vorausgesetzt wird. Die allgemeine Theorie soll jetzt auf diesen Fall angewendet und zwar gleichzeitig so spezialisiert werden, daß die gewöhnliche Theorie der algebraischen Funktionen und Differentiale herauskommt.

Wir betrachten eine von den Stellen a_σ, kurz a mit der Substitution A und nehmen zunächst an, daß alle n Zweige daselbst einen Zyklus bilden, A also die Gestalt hat

$$A = \begin{pmatrix} 0\,1\,0 \ldots 0 \\ 0\,0\,1 \ldots 0 \\ 0\,0\,0 \ldots 1 \\ 1\,0\,0 \ldots 0 \end{pmatrix}.$$

Es wird in der Bezeichnung von § 1

$$\varphi(s) = \psi(s) = s^n - 1 = (s - e_1)(s - e_2) \ldots (s - e_n),$$

$$e_h = e^{\frac{2i\pi(h-1)}{n}} \qquad {\scriptstyle h=1,\ldots n-1,n.}$$

*) Ich komme in mehreren folgenden Arbeiten ausführlich darauf zurück.

Als Lösung von

$$\mathsf{A}_h x = (e_h E - A)\, x = 0$$

wollen wir speziell diese wählen

(35.) $$x = p_h = (1, e_h, e_h^2, \dots e_h^{n-1}).$$

Dann wird durch die Substitution

(36.) $L = (p_1, p_2, \dots p_n)$ mit $L^{-1} = (q_1, q_2, \dots q_n)$ und

(37.) $$q_h = \left(\frac{1}{n}, \frac{e_h^{n-1}}{n}, \dots \frac{e_h}{n}\right)$$

A in die Normalform

$$B = \begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_n \end{pmatrix}$$

transformiert. Wir haben also nur *eingliedrige Ketten*, und es ist die Bedeutung von $\overset{a}{y} = L^{-1} y$ festgelegt. $\overset{a}{y}_h$ ist multiplikativ mit dem Faktor e_h und hat demgemäß eine Entwicklung der Gestalt*)

$$\overset{a}{y}_h = (z-a)^{\frac{h-1}{n}+g_h}\, \mathfrak{P}_h(z-a), \qquad \mathfrak{P}_h(0) \neq 0;$$

die reduzierten Exponenten sind

$$\alpha_i = \frac{i-1}{n}.$$

Umgekehrt erkennt man aus (35.), (36.), daß für $y = L\overset{a}{y}$ die Entwicklung in der Umgebung von $z = a$ so lautet:

(38.)
$$\begin{aligned} y_1 &= \overset{a}{y}_1 + \overset{a}{y}_2 + \cdots + \overset{a}{y}_n = \mathfrak{P}\left(\sqrt[n]{t}\right) \\ y_2 &= e_1 \overset{a}{y}_1 + e_2 \overset{a}{y}_2 + \cdots + e_n \overset{a}{y}_n = \mathfrak{P}\left(e_2 \sqrt[n]{t}\right) \end{aligned}$$

usw.

Jetzt steht auch der Begriff fest:

$$\frac{\overset{a}{y}}{t^{\alpha}} \text{ Vielfaches von } \begin{cases} \mathfrak{a}_1^{\lambda_1} \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\lambda_n} \end{cases} \text{ bei } \mathfrak{a},$$

nämlich wenn $g_i \geqq \lambda_i$ ist, bezw. für $\overset{a}{y}_i \equiv 0$, λ_i beliebig. Andererseits nennt man die algebraische Funktion y ein Multiplum von $\mathfrak{A}^k$, wo $\mathfrak{A}$ auf der geschlossenen *Riemann*schen Fläche R_F ein $(n-1)$ facher Verzweigungspunkt ist, falls in der Entwicklung von y_i (38.) nach Potenzen der Ortsuniformisierenden die Potenzreihe mit einer Potenz $\geqq k$ beginnt. Den Zusammenhang beider Definitionen vermittelt folgender

*) Wenn es nicht identisch Null ist, was vorkommen kann.

Satz 21: *Ist das System* $\overset{a}{\frac{y}{t^a}}$ *ein Multiplum des Divisorensystems*

$$(39.) \qquad \begin{Bmatrix} a_1^\lambda \\ \vdots \\ a_n^\lambda \end{Bmatrix} \text{ bezw. } \begin{Bmatrix} a_1^{\lambda+1} \\ \cdots\cdots \\ a_h^{\lambda+1} \\ a_{h+1}^\lambda \\ \vdots \\ a_n^\lambda \end{Bmatrix} \quad 1 \leqq h < n,$$

so ist y ein Multiplum von $\mathfrak{A}^{n\lambda}$ *bezw.* $\mathfrak{A}^{n\lambda+h}$ *und umgekehrt.*

Der Beweis folgt direkt durch Vergleichung der Reihenentwicklung von y, $\overset{a}{y}$ an der Stelle a, wobei die Form von L und L^{-1} (36.) in Betracht kommt. Man erkennt also: *der in der Lehre von den algebraischen Funktionen übliche Begriff des Multiplums ist nur ein Spezialfall unserer allgemeinen Definition, indem man L wie oben wählt und nur „spezielle Divisorensysteme“* mit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ bezw. $\lambda_1 = \cdots = \lambda_h = \lambda + 1$, $\lambda_{h+1} = \cdots = \lambda_n = \lambda$ zuläßt, und demgemäß sind auch alle darauf beruhenden bekannten Sätze nur Spezialfälle von den unsrigen*).

Hängen — wie bisher angenommen — bei a nicht alle n Zweige zusammen, sondern zerfällt A in mehrere Vertauschungssubstitutionen von n', n'' ... Zweigen,

$$A = \begin{pmatrix} A' & & \\ & A'' & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^{**)},$$

dann wird A durch die Substitution

$$(40.) \qquad L = \begin{pmatrix} L' & & \\ & L'' & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \text{ wobei } L'^{-1} A' L' = B' \text{ usw.}$$

in die Normalform

$$B = \begin{pmatrix} B' & & \\ & B'' & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

transformiert. L^{-1} zerfällt entsprechend, und es sind jetzt wieder die $\overset{a}{y_i}$ so-

---

*) Andererseits erkennt man, daß eine Theorie, die nur Divisoren mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$ in Betracht zieht, zu eng wäre, um die Einordnung des algebraischen Falles zu ermöglichen.

**) Durch Wahl der Bezeichnung läßt sich erreichen, daß das Zerfallen in dieser einfachen Weise geschieht.

wie die reduzierten Exponenten α_i und damit der Begriff des Multiplums bei $\mathfrak{a}$ festgelegt. Es gibt wieder nur lauter *eingliedrige Ketten.* Es wird

$$\Sigma\Sigma\alpha = 0 + \frac{1}{n'} + \frac{2}{n'} + \cdots \frac{n'-1}{n'} + \cdots = \Sigma\Sigma\left(\frac{n'-1}{2}\right) = \frac{w}{2},$$

gleich der Hälfte der Verzweigungszahl w der *Riemann*schen Fläche, welche sich also als *gerade* Zahl herausstellt, und

$$\Sigma\Sigma\alpha - n + 1 = \frac{w}{2} - n + 1 = p$$

gleich dem Geschlecht der *Riemann*schen Fläche.

§ 16. Übertragung der Sätze und Theoreme.

Wir suchen nun *sämtliche Theoreme zu spezialisieren*, indem wir die Übertragung der Sätze dem Leser überlassen. Diejenigen ausgezeichneten Moduln, die bei der umkehrbar eindeutigen Zuordnung nach Theorem I auf spezielle Divisorensysteme und damit auf beliebige Divisoren auf R_F abgebildet erscheinen, nennen wir *Spezialmoduln.* Das Produkt zweier spezieller Divisorensysteme ist jedoch im allgemeinen nicht wieder ein solches, und damit wird auch die am Schluß von § 8 angedeutete Komposition hinfällig. Verstehen wir jedoch unter dem „Produkt" zweier Spezialmoduln $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_1 \rightarrow \mathfrak{P}_1, \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{P}_2 -$, wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ beliebige Divisoren auf R_F sind, denjenigen Spezialmodul $\mathfrak{S}$, welcher zu $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2$ gehört, so läßt sich auch für das engere Gebiet der Spezialmoduln eine Komposition und eindeutige Zerlegbarkeit usw. erreichen.

Gleichung (21.) liefert den *Kronecker*schen Diskriminantensatz*).

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, nehmen wir jetzt an, daß bei $\mathfrak{a}$ nur ein Verzweigungspunkt n-ter Ordnung $\mathfrak{A}$ liegt; der allgemeine Fall ist ja durch die Festsetzungen (40.) auch getroffen.

Alsdann ist

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1}{n}, \ldots \alpha_n = \frac{n-1}{n},$$
$$\alpha_1 = 0, \breve{\alpha}_2 = \frac{n-1}{n}, \ldots \alpha_n = \frac{1}{n}, \qquad \breve{\alpha}_i = -\alpha_i + \varepsilon_i,$$

und dem System

---

*) Vergl. *Hensel-Landsberg*, a. a. O., S. 219.

$$\frac{1}{\mathfrak{Z}} = \Pi \begin{cases} \mathfrak{a}_1^0 \\ \mathfrak{a}_2^{-1} \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{-1} \end{cases}$$

entspricht nach Satz 21 richtig der reziproke Verzweigungsdivisor

$$\frac{1}{\mathfrak{Z}} = \Pi \mathfrak{A}^{-(n-1)}$$

der *Riemann*schen Fläche und damit $\mathfrak{W}$ auch richtig der Differentialdivisor der *Riemann*schen Fläche*). Für das System $\left(\breve{y}, \frac{\breve{y}^{\mathfrak{a}}}{t^{\breve{\alpha}}}\right)$ besteht der zu (21.) analoge

Satz 22: *Ist* $\frac{\breve{y}^{\mathfrak{a}}}{t^{\breve{\alpha}}}$ *ein Multiplum von* $(\mathfrak{a}_1^\lambda, \mathfrak{a}_2^\lambda, \dots \mathfrak{a}_n^\lambda)$ *bezw.* $(\mathfrak{a}_1^{\lambda+1}; \mathfrak{a}_2^\lambda, \dots \mathfrak{a}_{n-h+1}^\lambda; \mathfrak{a}_{n-h+2}^{\lambda+1}, \dots \mathfrak{a}_n^{\lambda+1})$, *so ist* $\breve{y}$ *ein Multiplum von* $\mathfrak{A}^{n\lambda}$ *bezw.* $\mathfrak{A}^{n\lambda+h}$ *und umgekehrt.*

Man überzeugt sich von der Richtigkeit wieder durch direkte Reihenentwicklung von y und $\breve{y}^{\mathfrak{a}}$ an der Stelle $\mathfrak{a}$. Dann geht Theorem IIa über in den bekannten Satz bei den algebraischen Funktionen**).

Auch für die Differentialsysteme muß der oben erklärte Begriff des Multiplums in Beziehung gesetzt werden zu dem bei den *Abel*schen Differentialen üblichen***): $dI = ydz$ Multiplum von $\mathfrak{Q}$, wenn y Multiplum von $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{W}^{-1}$ ist. Das gibt für eine Stelle $\mathfrak{a}$ den

Satz 23: *Wenn das System* $\left(ydz, \frac{\breve{y}^{\mathfrak{a}} dz}{t^{\alpha}}\right)$ *ein Multiplum von* $(\mathfrak{a}_1^\lambda, \mathfrak{a}_2^\lambda, \dots \mathfrak{a}_n^\lambda)$ *bezw. von* $(\mathfrak{a}_1^\lambda; \mathfrak{a}_2^{\lambda+1}, \dots \mathfrak{a}_{h+1}^{\lambda+1}; \mathfrak{a}_{h+2}^\lambda, \dots \mathfrak{a}_n^\lambda)$ *ist, dann ist* ydz *ein Multiplum von* $\mathfrak{A}^{n\lambda}$ *bezw.* $\mathfrak{A}^{n\lambda+h}$ *und umgekehrt.*

Analog erhält man für das komplementäre System den

Satz 24: *Wenn das System* $\left(\breve{y}dz, \frac{\breve{y}^{\mathfrak{a}} dz}{t^{\breve{\alpha}}}\right)$ *ein Multiplum von* $(\mathfrak{a}_1^\lambda, \mathfrak{a}_2^\lambda, \dots \mathfrak{a}_n^\lambda)$ *bezw.* $(\mathfrak{a}_1^\lambda, \dots \mathfrak{a}_{n-h}^\lambda; \mathfrak{a}_{n-h+1}^{\lambda+1}, \dots \mathfrak{a}_n^{\lambda+1})$ *ist, dann ist* $\breve{y}dz$ *ein Multiplum von* $\mathfrak{A}^{n\lambda}$ *bezw.* $\mathfrak{A}^{n\lambda+h}$ *und umgekehrt.*

---

*) s. ebenda S. 219 und S. 293.
**) s. ebenda S. 231.
***) s. ebenda S. 296.

Beweis auf Grund der Definition durch Übergang von den Differentialen zu den Funktionen. Auf Grund dieser Sätze erkennt man, daß das *Theorem III in den gewöhnlichen Riemann-Rochschen Satz* bei den algebraischen Funktionen übergeht*).

Die Reziprozitätstheoreme liefern (IV.)

$$2p-2=\mathfrak{w}=\mathfrak{z}-2n=w-2n,$$

also den Zusammenhang zwischen Geschlecht der Klasse und Ordnung des Differentialdivisors. In V.* bezw. VI.* werden $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}^*$ bezw. $\mathfrak{Q}, {}^*\mathfrak{Q}$ zwei beliebige Divisoren der Fläche mit dem Produkt

$$\mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{Q}^*=\mathfrak{W}^{-1}\cdot\mathfrak{R} \text{ bezw. } \mathfrak{Q}\cdot{}^*\mathfrak{Q}=\mathfrak{W}\cdot\mathfrak{R}$$

und $U, \breve{U}^*$ bezw. $V, {}^*\breve{V}$ die Anzahlen der linear unabhängigen Funktionen y bezw. Differentiale ydz, welche Multipla von diesen sind. VI* ist das *(Verallgemeinerte) Brill-Noethersche Theorem.*

Schlußbemerkungen.

Es ist eine wesentliche Erkenntnis, daß alle bisherigen Sätze über algebraische Funktionen (und ihre Differentiale) lediglich auf ihrer *Klasseneigenschaft* beruhen. Aus ihrer *Körpereigenschaft* folgen jetzt noch weitere, neue Tatsachen, die sie vor den Funktionen einer beliebigen Klasse voraushaben. Vergl. § 19 der „R. F. P.“.

Mit ihrer Aufstellung ist der Ring geschlossen. Es kann jetzt ein algebraisches Gebilde mit beliebigem Geschlecht $p>0$ zugrunde gelegt und die Theorie der *Riemann*schen Funktionensysteme auf diesem entwickelt werden. Der Fall $n=1$ wurde bereits vom Verf. erledigt**) ***).

---

*) s. ebenda S. 304 (II).

**) Arithmetische Theorie der verzweigten multiplikativen Funktionen und Differentiale, *Crelle*s Journal Bd. 146 (1916) S. 171 ff.

***) Auf der in vorstehender Arbeit entwickelten arithmetischen Grundlage ist es mir gelungen, für die *Riemann*schen Funktionen- und Differentialsysteme eine ähnliche tief eindringende und zum Teil noch umfassendere Theorie zu entwickeln, wie sie *Weierstraß* für die algebraischen Funktionen und ihre Integrale im 1. und 2. Abschnitt seiner klassischen Vorlesung über „*Abel*sche Transzendenten“ (Ges. Werke Bd. IV.) gegeben hat. Vergl. das zusammenfassende Referat in meiner Note: „*Weierstraß*' *Abel*sche Transzendenten und ihre Weiterführung“ (Berlin 4. Dez. 1917) in den Sitzungsberichten der Münchener Akademie 1918.

Berlin, 11. November 1916.

Über die Approximation stetiger Funktionen durch *Bernoulli*sche Polynome.

Von Herrn *Otto Szász* in Frankfurt a. M.

Die *Bernoulli*schen Funktionen

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$$

können bekanntlich durch die Reihenentwicklung

$$\frac{e^{ux}-1}{e^u-1} = \sum_0^\infty{}_\nu u^\nu \cdot \varphi_{\nu+1}(x)$$

definiert werden. Es ist*)

$$\varphi_1(x) = x,$$

$$\varphi_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{x^3}{3!} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{x}{12},$$

$$\varphi_4(x) = \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{12}\frac{x^2}{2!},$$

$$\varphi_5(x) = \frac{x^5}{5!} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4!} + \frac{1}{12}\frac{x^3}{3!} - \frac{x}{720},$$

. . . . . .

und allgemein

$$(1.) \qquad \varphi_n(x) = A_0\frac{x^n}{n!} + A_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + A_{n-1}x \qquad (n \geq 2),$$

wo

$$(2.) \qquad \begin{aligned} &A_0 = 1, \ A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_{2\lambda+1} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \dots), \\ &A_{2\lambda} = \frac{(-1)^{\lambda-1}B_\lambda}{(2\lambda)!} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{2^{2\lambda-1}\pi^{2\lambda}}\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu^{2\lambda}} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

ist; die Größen

$$B_\lambda = \frac{(2\lambda)!}{2^{2\lambda-1}\pi^{2\lambda}}\zeta(2\lambda) \qquad (\lambda \geq 1)$$

sind die *Bernoulli*schen Zahlen. Die A_ν können nach und nach durch die Rekursionsformel

$$\frac{A_0}{n!} + \frac{A_1}{(n-1)!} + \frac{A_2}{(n-2)!} + \dots + \frac{A_{n-2}}{2!} + A_{n-1} = 0 \qquad (n = 2, 3, \dots)$$

berechnet werden.

*) Vgl. z. B. *D. Seliwanoff*, Lehrbuch der Differenzenrechnung, Leipzig (1904), S. 40 ff.

Bekanntlich*) ist für $0 \leqq x \leqq 1$ und $\varkappa \geqq 1$

$$(3.) \qquad \varphi_{2\varkappa}(x) = -A_{2\varkappa} - \frac{(-1)^{\varkappa}}{2^{2\varkappa-1}\pi^{2\varkappa}} \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu^{2\varkappa}};$$

da ferner (vgl. (1.) und (2.))

$$(4.) \qquad \varphi'_{2\varkappa+2}(x) = \varphi_{2\varkappa+1}(x)$$

ist, so erhält man**) für $\varkappa \geqq 1$

$$(5.) \qquad \varphi_{2\varkappa+1}(x) = \frac{(-1)^{\varkappa-1}}{2^{2\varkappa}\pi^{2\varkappa+1}} \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu^{2\varkappa+1}}.$$

Man setze nun

$$\left.\begin{aligned} (6.)\ P_{\varkappa}(x) &= (\varphi_{2\varkappa}(x) + A_{2\varkappa}) \cdot 2^{2\varkappa-1}\pi^{2\varkappa}(-1)^{\varkappa-1} = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu^{2\varkappa}} \\ (7.)\ Q_{\varkappa}(x) &= (-1)^{\varkappa-1}2^{2\varkappa}\pi^{2\varkappa+1}\varphi_{2\varkappa+1}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu^{2\varkappa+1}} \end{aligned}\right\} (\varkappa = 1,2,3,\ldots);$$

die Approximation einer Funktion durch *Bernoulli*sche Polynome ist offenbar leicht zurückführbar auf die Approximation durch die Funktionen $P_{\varkappa}(x)$, $Q_{\varkappa}(x)$. Mit dieser Approximierbarkeit hat sich Herr *Müntz****) beschäftigt. Ich beweise im folgenden zwei Sätze, von denen der erste im wesentlichen mit dem *Müntz*schen Resultate übereinstimmt, und benutze dazu eine Schlußweise, die ich bei ähnlichen Fragestellungen schon früher anwandte†) und die elementarer ist, als die von Herrn *Müntz* verwendete. Die beiden Sätze lauten:

Satz I. *Jede im Nullpunkt verschwindende, im abgeschlossenen Intervall* $<0, \frac{1}{2}>$ *stetige Funktion läßt sich durch lineare Aggregate einer beliebigen unendlichen Folge von Bernoullischen Polynomen geraden Grades gleichmäßig mit beliebiger Genauigkeit approximieren.*

---

*) Man vgl. z. B. *Seliwanoff*, a. a. O. S. 46—47.

**) Man vgl. auch *P. Böhmer*, Über die *Bernoulli*schen Funktionen [Math. Annalen Bd. 68, 1909, S. 338—360], S. 360. — Correspondance d'*Hermite* et de *Stieltjes*, Bd. II, S. 395. Daselbst hat $S_n(x)$ die Bedeutung von $n!\,\varphi_{n+1}(x)$.

***) *Ch. H. Müntz*, Sur une propriété des polynomes de *Bernoulli* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 158 (1914), p. 1864—1866]. Hier ist mit $\varphi_{\varkappa}$ unsere Funktion $\varphi_{2\varkappa}$ bezeichnet. — Die Untersuchung weist eine Unstimmigkeit auf, die sich aber leicht beseitigen läßt. Der Satz des Herrn *Müntz* wird richtig, wenn darin das Intervall $<0, 1>$ durch das Intervall $<0, \frac{1}{2}>$ ersetzt wird. Wie ich unten zeige, läßt sich dieses Intervall über $\frac{1}{2}$ hinaus nicht vergrößern.

†) *Szász*, a) Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen [Math. Annalen Bd. 77, 1916, S. 482—496]. — b) Folytonos függvények megközelítése adott függvénysorozatból képezett lineáris kifejezésekkel [Mathematikai és Physikai Lapok, Bd. XXV (Budapest, 1917), S. 1—21].

Satz II. *Es sei*

$$\varphi_1(x) = x, \varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x), \ldots, \varphi_{n_\nu}(x), \ldots$$

eine unendliche Folge Bernoullischer Polynome, die sowohl unendlich viele Polynome geraden Grades, wie auch unendlich viele Polynome ungeraden Grades (darunter φ_1) enthält; dann läßt sich durch lineare Aggregate dieser Funktionen jede für $x = 0$ verschwindende, im Intervall $<0, 1>$ stetige Funktion gleichmäßig mit beliebiger Genauigkeit approximieren.

§ 1. Beweis des Satzes I.

Die Reihe

$$D_\varrho(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu^\varrho}$$

ist offenbar absolut und bei festem ϱ in x gleichmäßig konvergent, sobald $\Re(\varrho) > 1$ ist. ($\Re(\varrho)$ bedeutet den reellen Teil der komplexen Zahl ϱ.)

Es sei nun $f(x)$ eine samt ihrem Quadrate im *Lebesgue*schen Sinne integrierbare Funktion; ich betrachte dann die Funktion

$$F(\varrho) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, D_\varrho(x)\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) \left(\sum_1^\infty{}_\nu \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu^\varrho} \right) dx.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz darf man bekanntlich*) gliedweise integrieren und erhält

$$F(\varrho) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{\nu^\varrho},$$

wo

$$c_\nu = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) \sin 2\nu\pi x\, dx \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Offenbar verschwinden nur dann sämtliche c_ν, wenn $f(x) \equiv 0$ ist (höchstens mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null). In jedem andern Falle gibt es zu der für $\Re(\varrho) > 1$ sicher konvergenten *Dirichlet*schen Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{\nu^\varrho}$ ein ϱ_0, sodaß**)

$$F(\varrho) \neq 0 \text{ für } \varrho > \varrho_0.$$

Nun ist

$$D_{2\varrho+1}(x) = Q_\varrho(x) \text{ für } \varrho = 1, 2, 3, \ldots;$$

hieraus folgt, daß es keine samt ihrem Quadrate im *Lebesgue*schen Sinne integrierbare Funktion gibt, die im Intervalle $<0, \frac{1}{2}>$ zu den Funktionen

*) Man vgl. z. B. Enzykl. der Mathem. Wissenschaften, II A. 3. S. 144.

**) Man vgl. z. B. *E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I (1909), S. 133–134.

$$(8.) \qquad Q_{\lambda_1}(x), Q_{\lambda_2}(x), \ldots$$

orthogonal ist, wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ irgend eine unendliche Folge natürlicher Zahlen bedeutet. Das heißt, das Funktionensystem (8.) ist vollständig im Intervall $<0, \frac{1}{2}>$. Dann ist aber bekanntlich*) in diesem Intervall jede stetige Funktion durch die Funktionenfolge (8.) im Mittel approximierbar.

Wir haben hier durch Benutzung des bekannten Satzes über vollständige Funktionenfolgen und durch Anwendung eines Satzes über *Dirichlet*sche Reihen Approximierbarkeit im Mittel bewiesen. Auf diese Beweisführung wurde ich während eines Gespräches im Sommer 1914 von Herrn *A. Haar* aufmerksam gemacht.

Es ist also möglich, zu irgend einer positiven ganzen Zahl p und zu einer beliebigen wesentlich positiven Zahl ε die Konstanten $a_1, \ldots, a_n$ so zu bestimmen, daß

$$(9.) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} (p x^{p-1} + a_1 Q_{\lambda_1}(x) + \cdots + a_n Q_{\lambda_n}(x))^2 \, dx < \varepsilon^2.$$

Dann ist aber in demselben Intervall durch die Funktionen

$$(10.) \qquad \psi_1(x) = \int_0^x Q_{\lambda_1}(z)\, dz, \quad \psi_2(x) = \int_0^x Q_{\lambda_2}(z)\, dz, \ldots$$

jede für $x = 0$ verschwindende stetige Funktion gleichmäßig approximierbar. Es ist nämlich

$$\int_0^z (p x^{p-1} + a_1 Q_{\lambda_1}(x) + \cdots + a_n Q_{\lambda_n}(x))\, dx = z^p + a_1 \int_0^z Q_{\lambda_1}(x)\, dx + \cdots + a_n \int_0^z Q_{\lambda_n}(x) dx;$$

hieraus folgt unmittelbar

$$| z^p + a_1 \psi_1(z) + \cdots + a_n \psi_n(z) | \leqq \int_0^z | p x^{p-1} + a_1 Q_{\lambda_1}(x) + \cdots + a_n Q_{\lambda_n}(x) | \, dx.$$

Wenden wir nun auf den rechtsseitigen Ausdruck die bekannte Ungleichung

---

*) Vgl. *E. Fischer*, Applications d'un théorème sur la convergence en moyenne [Comptes rendus hebdomadaires d. séances de l'Acad. d. Sciences, Paris, t. 144 (1907), p. 1148—1151]. Der Satz ist hier nur für Orthogonalfunktionen bewiesen, aber die Übertragung auf beliebige Funktionensysteme ist sehr einfach. — Man könnte auch mit Hilfe eines *F. Riesz*schen Satzes direkt von der Vollständigkeit des Systems (8.) auf die gleichmäßige Approximierbarkeit mit den Funktionen (10.) schließen; vgl. *F. Riesz*, Sur une espèce de Géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables [Comptes rendus hebdomadaires d. séances de l'Acad. d. Sciences, Paris, t. 144 (1907), p. 1409—1411], S. 1411. — Sur certaines systèmes singuliers d'équations intégrales [Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, t. 28, 3e Série, 1911, p. 33—62], S. 52.

$$\int_a^b |g(z)|\,dz \leqq \left[(b-a)\int_a^b |g(z)|^2\,dz\right]^{\frac{1}{2}}$$

an, so erhalten wir mit Beachtung der Ungleichung (9.)

$$(11.) \qquad |z^p + a_1\psi_1(z) + \cdots + a_n\psi_n(z)| \leqq \varepsilon \text{ für } 0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}.$$

Da aber jede im Nullpunkt verschwindende stetige Funktion durch lineare Aggregate der Potenzen $z, z^2, \ldots$ gleichmäßig approximierbar ist, so folgt hieraus unmittelbar die Approximierbarkeit durch das Funktionensystem (10.).

Aus (11.) folgt nun mit Rücksicht auf (3.) bis (7.)

$$|z^p + a_0' + a_1'\varphi_{2\lambda_1+2}(z) + \cdots a_n'\varphi_{2\lambda_n+2}(z)| \leqq \varepsilon, \qquad 0 \leqq z \leqq \frac{1}{2},$$

wo $a_0', a_1', \ldots, a_n'$ gewisse Konstanten bedeuten; hieraus erhält man für $z = 0$ wegen $\varphi_\nu(0) = 0$

$$|a_0'| \leqq \varepsilon;$$

also ist

$$|z^p + a_1'\varphi_{2(\lambda_1+1)}(z) + \cdots + a_n'\varphi_{2(\lambda_n+1)}(z)| \leqq 2\varepsilon, \qquad 0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}.$$

Damit ist Satz I bewiesen.

Bekanntlich gilt die Funktionalgleichung

$$(12.) \qquad \varphi_{2x}(1-x) = \varphi_{2x}(x);$$

hieraus folgt sofort, daß im Satz I die obere Grenze des Intervalles $<0, \frac{1}{2}>$ nicht vergrößert werden kann. Wenn aber die zu approximierende Funktion ebenfalls der Funktionalgleichung (12.) genügt, so gilt die für das Intervall $<0, \frac{1}{2}>$ bestimmte Annäherung ohne weiteres für das Intervall $<0, 1>$.

Genau so wie Satz I ergibt sich durch Betrachtung der Funktion

$$G(\varrho) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\left(\sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu^\varrho}\right) dx,$$

daß

$$1, P_{x_1}(x), P_{x_2}(x), \ldots$$

ein vollständiges Funktionensystem für das Intervall $<0, \frac{1}{2}>$ ist, wenn es nur unendlich viele Glieder enthält, und hieraus folgt, daß die Funktionenfolge

$$x, \varphi_{2x_1+1}(x), \varphi_{2x_2+1}(x), \ldots$$

eine Basis aller für $x = 0$ verschwindenden stetigen Funktionen im Intervall $<0, \frac{1}{2}>$ ist.

§ 2. Beweis des Satzes II.

Ich betrachte jetzt zu einer samt ihrem Quadrate im *Lebesgue*schen Sinne integrierbaren Funktion $f(x)$ die Funktionen

$$\left.\begin{aligned} F_1(\varrho) &= \int_0^1 f(x)\left(\sum_1^\infty{}_\nu \frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu^\varrho}\right)dx, \\ F_2(\varrho) &= \int_0^1 f(x)\left(\sum_1^\infty{}_\nu \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu^\varrho}\right)dx \end{aligned}\right\} \Re(\varrho) > 1.$$

Offenbar darf man hier gliedweise integrieren und erhält

$$(13.) \qquad F_1(\varrho) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{a_\nu}{\nu^\varrho}, \qquad F_2(\varrho) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{b_\nu}{\nu^\varrho},$$

wobei

$$a_\nu = \int_0^1 f(x)\sin 2\nu\pi x\,dx, \qquad b_\nu = \int_0^1 f(x)\cos 2\nu\pi x\,dx \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die *Dirichlet*schen Reihen unter (13.) sind für $\Re(\varrho) > 1$ sicherlich konvergent, wenn sie also nicht beide identisch verschwinden, so gibt es ein ϱ_1, sodaß für alle $\varrho > \varrho_1$ mindestens eine der beiden Reihen von Null verschieden ist. Offenbar verschwinden aber nur dann beide Reihen identisch, wenn $f(x)$ eine Konstante ist. In jedem andern Falle hat also mindestens eine der beiden Funktionen $F_1(\varrho)$, $F_2(\varrho)$ nur endlich viele Nullstellen auf der positiv reellen Axe. Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Formeln (3.) und (5.), daß die Funktionenfolge

$$1, \varphi_{2\varkappa_1}(x), \varphi_{2\varkappa_2}(x), \ldots; \varphi_{2\lambda_1-1}(x), \varphi_{2\lambda_2-1}(x), \ldots$$

vollständig ist im Intervall $<0, 1>$, wenn nur $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ zwei unendliche, aber sonst beliebige Folgen natürlicher Zahlen bedeuten. Und hieraus erhält man durch eine analoge Schlußweise, wie in § 1, bei Beachtung der Formeln (3.) bis (6.) den Satz II.

Es ist leicht, andere Funktionensysteme anzugeben, die ebenfalls die Eigenschaft haben, daß *jede* unendliche Teilfolge eine Basis in einem gewissen Intervall ist. So hat z. B. — wie man aus einem bekannten Satze*) leicht erschließt — das Funktionensystem

$$x^2, x^{\frac{3}{2}}, x^{\frac{4}{3}}, \ldots, x^{\frac{\nu+1}{\nu}}, \ldots$$

diese Eigenschaft für das Intervall $<0, 1>$.

---

*) Man vgl. z. B. meine auf S. 184 zitierte Math. Annalen-Arbeit, § 3.